6. Calcular el área del recinto finito limitado por:

a) el eje OX, las rectas $x = -1$, $x = 1$ y la gráfica de $f(x) = e^{-x}$

b) el eje OX y la gráfica de $f(x) = -x^2 - 5x - 6$

c) el eje OX y la gráfica de $f(x) = x^2 - 6x + 5$

d) el eje OX, las rectas $x = -1$, $x = 3$ y la gráfica de $f(x) = x + x^3$

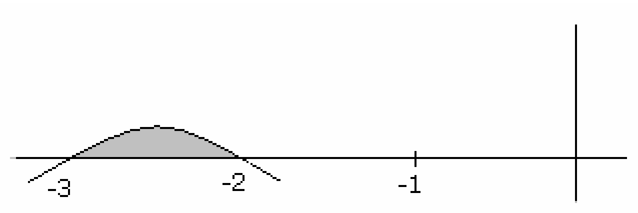
e) la recta $y = x$ y la gráfica de $f(x) = 3x - x^2$

Solución

a) Como $f(x) = e^{-x} \geq 0$ en [-1, 1] se tiene que $A = \int_{-1}^{1} e^{-x}\, dx = \left[-e^{-x}\right]_{-1}^{1} = -e^{-1} - (-e^{1}) = e - \frac{1}{e}$

b) La gráfica de $f(x) = -x^2 - 5x - 6$ es una parábola con vértice en el punto $\left(\frac{-5}{2}, \frac{1}{4}\right)$ y que corta al eje OX en las soluciones de la ecuación $-x^2 - 5x - 6 = 0$:

$$-x^2 - 5x - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -2,\ x = -3$$

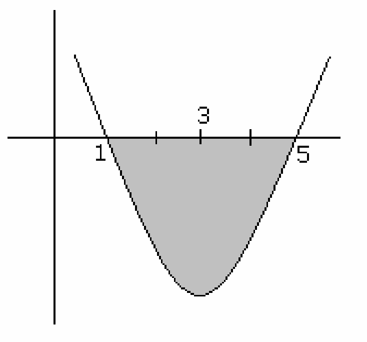


Como el recinto está por encima del eje de abscisas, se tiene

$$A = \int_{-3}^{-2} \left(-x^2 - 5x - 6\right) dx = \left[-\frac{x^3}{3} - 5\frac{x^2}{2} - 6x\right]_{-3}^{-2} = -\frac{(-2)^3}{3} - 5\frac{(-2)^2}{2} - 6(-2) - \left(-\frac{(-3)^3}{3} - 5\frac{(-3)^2}{2} - 6(-3)\right) =$$

$$= \frac{8}{3} - 10 + 12 - 9 + \frac{45}{2} - 18 = -25 + \frac{16 + 135}{6} = \frac{-150 + 151}{6} = \frac{1}{6}$$

c) La gráfica de $f(x) = x^2 - 6x + 5$ es una parábola con vértice en el punto (3, -4) y que corta al eje OX en las soluciones de la ecuación $x^2 - 6x + 5 = 0$. Dichas soluciones son $x = 1$, $x = 5$.

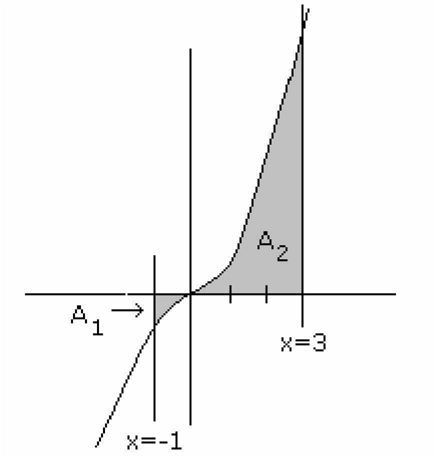


Como el recinto está por debajo del eje de abscisas, se tiene

$$A = \int_{1}^{5} -\left(x^2 - 6x + 5\right) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 6\frac{x^2}{2} - 5x\right]_{1}^{5} = -\frac{5^3}{3} + 6\frac{5^2}{2} - 5\cdot 5 - \left(-\frac{1^3}{3} + 6\frac{1^2}{2} - 5\right) =$$

$$= -\frac{125}{3} + 75 - 25 + \frac{1}{3} - 3 + 5 = \frac{32}{3}$$

d) Se representan la función $f(x) = x + x^3$ y las rectas $x = -1$, $x = 3$ para determinar el recinto.



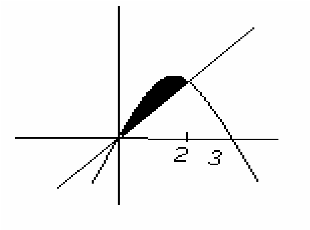
En este caso tiene una parte por debajo del eje OX y otra por encima, por ello calcularemos el área total como suma de A_1 y A_2

$$A_1 = \int_{-1}^{0} -\left(x + x^3\right) dx = \left[\frac{-x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{0} = -\left(\frac{-(-1)^2}{2} - \frac{(-1)^4}{4}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$A_2 = \int_{0}^{3} \left(x + x^3\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}\right]_{0}^{3} = \frac{9}{2} + \frac{81}{4} = \frac{99}{4}$$

De donde se deduce $A = A_1 + A_2 = \frac{3}{4} + \frac{99}{4} = \frac{102}{4} = \frac{51}{2}$

e) Se representan la recta $y = x$ y la parábola $f(x) = 3x - x^2$ para dibujar el recinto limitado por dichas curvas.



Para determinar los extremos de integración es necesario calcular los puntos de corte de ambas curvas resolviendo el sistema

$$\begin{cases} y = x \\ y = 3x - x^2 \end{cases} \Rightarrow x = 3x - x^2 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 2,\ x = 0.$$

Por tanto, $A = \int_{0}^{2} \left(3x - x^2 - x\right) dx = \int_{0}^{2} \left(2x - x^2\right) dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_{0}^{2} = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$