5. Calcular las siguientes integrales definidas y razonar si su valor coincide con el área del recinto limitado por la gráfica de la función integrando, el eje OX y las rectas verticales determinadas por los extremos de integración.

a) $\int_{-1}^{4}(1+x^2)\,dx$ **b)** $\int_{\pi/4}^{\pi}\cos x\;dx$ **c)** $\int_{-1}^{2}(3x+x^2)\,dx$ **d)** $\int_{0}^{3}(\sqrt{1+x}-x)dx$

a) $\int_{-1}^{4}(1+x^2)\,dx = \left[x+\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{4} = 4+\frac{4^3}{3}-\left(-1+\frac{-1}{3}\right)=5+\frac{65}{3}=\frac{80}{3}$

El área del recinto es $\int_{-1}^{4}(1+x^2)\,dx = \frac{80}{3}$, ya que $f(x)=1+x^2 \geq 0 \quad \forall x\in[-1, 4]$

b) $\int_{\pi/4}^{\pi}\cos x\;dx = \left[\operatorname{sen} x\right]_{\pi/4}^{\pi} = \operatorname{sen}\pi - \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

El área del recinto no puede ser igual a $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ya que es un número negativo.

c) $\int_{-1}^{2}(3x+x^2)\,dx = \left[3\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} = 3\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}-\left(3\frac{(-1)^2}{2}+\frac{(-1)^3}{3}\right)=6+\frac{8}{3}-\frac{3}{2}+\frac{1}{3}=9-\frac{3}{2}=\frac{15}{2}$

Para determinar si el valor calculado anteriormente coincide con el área del recinto indicado, es necesario estudiar el signo de $f(x) = 3x + x^2$.

Para ello se factoriza el polinomio, obteniéndose $f(x) = x\,(3 + x)$, de donde se puede deducir el signo según los intervalos determinados por las raíces $x = 0$, $x = -3$. En los intervalos $(-\infty, -3)$ y $(0, +\infty)$ la función es positiva y en $(-3, 0)$ es negativa.

Por tanto, en el intervalo de integración [-1, 2] la función toma valores negativos y positivos, en consecuencia el área del recinto no coincide con el valor de la integral definida.

d) $\int_{0}^{3}(\sqrt{1+x}-x)dx = \left[\frac{(1+x)^{3/2}}{3/2}-\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{3} = \left[\frac{2(1+x)\sqrt{1+x}}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{3} = \frac{2\cdot 4\sqrt{4}}{3}-\frac{3^2}{2}-\frac{2}{3} = \frac{16}{3}-\frac{9}{2}-\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$

El área del recinto no coincide con el valor de la integral definida, ya que $f(x)=\sqrt{1+x}-x$ toma valores positivos y negativos en [0, 3]