

3. Calcular $\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{3-x}} dx$ realizando el cambio de variable $\sqrt{3-x} = t$

Solución

A partir del cambio $\sqrt{3-x} = t$, elevando al cuadrado queda, $3 - x = t^2$, de donde se obtiene,

$$x = 3 - t^2 \text{ y } dx = -2t dt$$

Los nuevos extremos de integración para esta variable se calculan sustituyendo los extremos

$$\text{iniciales en } t = \sqrt{3-x}. \text{ Por tanto se tiene, } \begin{cases} x = 1 \Rightarrow t = \sqrt{3-1} = \sqrt{2} \\ x = 2 \Rightarrow t = \sqrt{3-2} = 1 \end{cases}$$

Sustituyendo el cambio en la integral inicial y resolviendo la integral obtenida queda:

$$\int_{\sqrt{2}}^1 \frac{3-t^2}{t} (-2t) dt = \int_{\sqrt{2}}^1 (2t^2 - 6) dt = \left[2 \frac{t^3}{3} - 6t \right]_{\sqrt{2}}^1 = \frac{2}{3} - 6 - \left(\frac{2\sqrt{2}^3}{3} - 6\sqrt{2} \right) = \frac{14\sqrt{2} - 16}{3}$$