1. Calcular las siguientes integrales definidas:

a) $\int_{-2}^{2} x^3\,dx$ **b)** $\int_0^1 x\,e^x\,dx$ **c)** $\int_1^4 \left(2x^2+\sqrt{x}-\frac{3}{x}\right)dx$

d) $\int_0^1 \frac{x}{2-x}\,dx$ **e)** $\int_\pi^{2\pi} \operatorname{sen}\frac{x}{2}\,dx$ **f)** $\int_\pi^{2\pi} \operatorname{sen}\frac{x}{2}\,dx$

Solución

a) $\int_{-2}^{2} x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-2}^{2} = \frac{2^4}{4}-\frac{(-2)^4}{4} = 0$

En primer lugar se ha calculado una primitiva de $f(x) = x^3$ y después se ha aplicado la regla de Barrow.

b) Para calcular $\int_0^1 x\,e^x\,dx$ en primer lugar se halla la integral indefinida por el método de integración por partes considerando $\begin{cases} u = x \\ dv = e^x\,dx \end{cases}$ de donde se obtiene $\begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$

Aplicando la fórmula queda: $\int x\,e^x dx = x\,e^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$

Tomando la primitiva correspondiente a $C = 0$ y aplicando la Regla de Barrow, queda $\int_0^1 x\,e^x dx = \left[xe^x - e^x\right]_0^1 = e^1 - e^1 - (0-e^0) = 1$

c) $\int_1^4\left(2x^2+\sqrt{x}-\frac{3}{x}\right)dx = \int_1^4\left(2x^2+x^{1/2}-\frac{3}{x}\right)dx = \left[2\frac{x^3}{3}+\frac{x^{3/2}}{3/2}-3\ln x\right]_1^4 = \left[\frac{2}{3}x^3+\frac{2}{3}x\sqrt{x}-3\ln x\right]_1^4 =$

$$=\frac{2}{3}4^3+\frac{2}{3}4\sqrt{4}-3\ln 4-\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}-3\ln 1\right) = \frac{128}{3}+\frac{16}{3}-3\ln 4-\frac{4}{3} = \frac{140}{3}-3\ln 4$$

d) $\int_0^1 \frac{x}{2-x}dx = \int_0^1 -\frac{2-x-2}{2-x}dx = \int_0^1\left(-1+\frac{2}{2-x}\right)dx = \left[-x-2\ln(2-x)\right]_0^1 = -1-2\ln 1+2\ln 2 = -1+2\ln 2$

e) $\int_\pi^{2\pi} \operatorname{sen}\frac{x}{2}dx = 2\int_\pi^{2\pi}\frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{x}{2}dx = \left[-2\cos\frac{x}{2}\right]_\pi^{2\pi} = -2\cos\frac{2\pi}{2}+2\cos\frac{\pi}{2} = -2(-1)+2\cdot 0 = 2$

f) $\int_0^3 \frac{-2}{5x+1}dx = \frac{-2}{5}\int_0^3\frac{5}{5x+1}dx = \frac{-2}{5}\left[\ln(5x+1)\right]_0^3 = \frac{-2}{5}\left[\ln 16-\ln 1\right] = \frac{-2}{5}\ln 2^4 = \frac{-8}{5}\ln 2$