

**Teorema de Rouché-Frobenius**

Dado un sistema de  $m$  ecuaciones con  $n$  incógnitas,  $AX = B$  se tiene:

$$AX = B \text{ es un sistema compatible } \Leftrightarrow \text{rg } A = \text{rg}(A/B) = \rho$$

Además:  $\rho = n \Leftrightarrow$  el sistema es determinado (tiene una única solución)

$\rho < n \Leftrightarrow$  el sistema es indeterminado (tiene infinitas soluciones)

Ejemplo 2: Discutamos el sistema  $\left. \begin{array}{l} -2x + y = 2 \\ 5x - 2y = -1 \end{array} \right\}$  cuya matriz ampliada es  $(A/B) = \left( \begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 2 \\ 5 & -2 & -1 \end{array} \right)$

En primer lugar se realizan operaciones elementales con las filas hasta escalar  $(A/B)$

$$(A/B) = \left( \begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 2 \\ 5 & -2 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 \rightarrow 5F_1 + 2F_2} \left( \begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 8 \end{array} \right)$$

Observar que al escalar  $(A/B)$  también se ha escalonado  $A$  por lo que se puede determinar el rango de ambas matrices, y utilizando el teorema de Rouché- Frobenius, discutir el sistema.

Se tiene  $\text{rg } A = 2$  y  $\text{rg}(A/B) = 2$ . Además  $\text{rg } A = \text{rg}(A/B) = n^\circ$  de incógnitas = 2, por lo tanto, el sistema es compatible determinado, es decir, tiene una única solución.

**MÉTODOS DE RESOLUCIÓN DE LOS SISTEMAS LINEALES****• Método de Gauss**

Consiste en escalar la matriz ampliada realizando operaciones elementales por filas de manera que el sistema representado por la matriz escalonada (equivalente al inicial) es fácilmente resoluble.

Para hallar la solución de este último sistema, se escriben sus ecuaciones y se comienza a despejar las incógnitas partiendo de la última ecuación y sustituyendo en las anteriores, siguiendo un proceso ascendente.

Sólo se pueden realizar operaciones elementales con las filas ya que si se hacen con las columnas el sistema obtenido no es equivalente al dado.

Ejemplo 3: Resolvamos el sistema anterior, cuya matriz ampliada se escalonó obteniéndose  $(A/B) \approx \left( \begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 8 \end{array} \right)$

El sistema representado por esta nueva matriz es equivalente al inicial y sus ecuaciones son  $\left. \begin{array}{l} -2x + y = 2 \\ y = 8 \end{array} \right\}$

Se resuelve fácilmente despejando y de la segunda ecuación  $y = 8$ , que sustituida en la primera nos permite calcular  $x$ , luego,  $-2x + 8 = 2 \Rightarrow -2x = 2 - 8 \Rightarrow x = \frac{-6}{-2} \Rightarrow x = 3$ . Por tanto, la solución es  $x = 3$ ,  $y = 8$ .

## • Regla de Cramer

Se dice que un sistema  $AX = B$  de  $m$  ecuaciones con  $n$  incógnitas es de **Cramer** si:

i) Tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas, es decir  $m = n$

ii)  $|A| \neq 0$ , es decir,  $\text{rg } A = n$

*Discusión:* Todo sistema de Cramer es compatible determinado ya que  $\text{rg } A = \text{rg}(A/B) = n$ .

*Resolución:* Como  $|A| \neq 0$ , existe  $A^{-1}$ , lo que permite despejar  $X$ :

$$AX = B \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B \text{ única solución del sistema.}$$

Esta misma solución se puede calcular de otra forma, utilizando lo que se conoce como **regla de Cramer**:

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|} \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n$$

Observar que la matriz cuyo determinante aparece en el numerador se obtiene cambiando en la matriz  $A$  la columna  $i$ -ésima por la columna de los términos independientes.

Ejemplo 4: Vamos a comprobar que el sistema resuelto por el método de Gauss en el ejemplo 3 es un sistema de Cramer y lo resolveremos aplicando la regla de Cramer.

El sistema  $\begin{cases} -2x + y = 2 \\ 5x - 2y = -1 \end{cases}$  tiene dos ecuaciones con dos incógnitas y el determinante de su matriz de coeficientes es

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = (-2)(-2) - 1 \cdot 5 = -1 \neq 0, \text{ luego es un sistema de Cramer.}$$

Vamos a calcular su solución por la *Regla de Cramer*.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-3}{-1} = 3 \quad ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-8}{-1} = 8$$

Observar que la solución es la misma independientemente del método utilizado para su obtención.