

Regla de Cramer

Se dice que un sistema $AX = B$ de m ecuaciones con n incógnitas es de **Cramer** si:

- i) Tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas, es decir $m = n$
- ii) $|A| \neq 0$, es decir, $\text{rg } A = n$

Discusión: Todo sistema de Cramer es compatible determinado ya que $\text{rg } A = \text{rg}(A/B) = n$.

Resolución: Como $|A| \neq 0$, existe A^{-1} , lo que permite despejar X :

$$AX = B \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B \text{ única solución del sistema.}$$

Esta misma solución se puede calcular de otra forma, utilizando lo que se conoce como **regla de Cramer**:

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|} \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n$$

Observar que la matriz cuyo determinante aparece en el numerador se obtiene cambiando en la matriz A la columna i -ésima por la columna de los términos independientes.

Ejemplo: El sistema $\begin{cases} -2x + y = 2 \\ 5x - 2y = -1 \end{cases}$ tiene dos ecuaciones con dos incógnitas y el determinante de su matriz de coeficientes

es $|A| = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = (-2)(-2) - 1 \cdot 5 = -1 \neq 0$, luego es un sistema de Cramer.

Vamos a calcular su solución por la *Regla de Cramer*

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-3}{-1} = 3 \quad ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-8}{-1} = 8$$