

## Regla de Cramer

Se dice que un sistema  $AX = B$  de  $m$  ecuaciones con  $n$  incógnitas es de **Cramer** si:

- i) Tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas, es decir  $m = n$
- ii)  $|A| \neq 0$ , es decir,  $\text{rg } A = n$

*Discusión:* Todo sistema de Cramer es compatible determinado ya que  $\text{rg } A = \text{rg}(A/B) = n$ .

*Resolución:* Como  $|A| \neq 0$ , existe  $A^{-1}$ , lo que permite despejar  $X$ :

$$AX = B \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B \text{ única solución del sistema.}$$

Esta misma solución se puede calcular de otra forma, utilizando lo que se conoce como **regla de Cramer**:

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|} \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n$$

Observar que la matriz cuyo determinante aparece en el numerador se obtiene cambiando en la matriz  $A$  la columna  $i$ -ésima por la columna de los términos independientes.

Ejemplo: El sistema  $\begin{cases} -2x + y = 2 \\ 5x - 2y = -1 \end{cases}$  tiene dos ecuaciones con dos incógnitas y el determinante de su matriz de coeficientes

es  $|A| = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = (-2)(-2) - 1 \cdot 5 = -1 \neq 0$ , luego es un sistema de Cramer.

Vamos a calcular su solución por la *Regla de Cramer*

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-3}{-1} = 3 \quad ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-8}{-1} = 8$$