

Teorema de Rouché-Frobenius

Dado un sistema de m ecuaciones con n incógnitas, $AX = B$ se tiene:

$$AX = B \text{ es un sistema compatible } \Leftrightarrow \text{rg } A = \text{rg}(A/B) = p$$

Además: $p = n \Leftrightarrow$ el sistema es determinado (tiene una única solución)

$$p < n \Leftrightarrow \text{el sistema es indeterminado (tiene infinitas soluciones)}$$

Aplicando este teorema al caso de un **sistema homogéneo** $AX = 0$ se obtiene:

- Siempre es compatible, ya que $\text{rg } A = \text{rg}(A|0)$
- La solución nula o trivial, $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, es siempre solución de dicho sistema .
- Si $\text{rg } A = n$, el sistema homogéneo es compatible determinado y la única solución es la nula.
- Si $\text{rg } A < n$, el sistema homogéneo es compatible indeterminado y en este caso tiene infinitas soluciones además de la solución nula.

Ejemplo 2: Discutamos el sistema $\left. \begin{array}{l} -2x + y = 2 \\ 5x - 2y = -1 \end{array} \right\}$ cuya matriz ampliada es $(A/B) = \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 2 \\ 5 & -2 & -1 \end{array} \right)$

En primer lugar se realizan operaciones elementales con las filas hasta escalar (A/B)

$$(A/B) = \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 2 \\ 5 & -2 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 \rightarrow 5F_1 + 2F_2} \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 8 \end{array} \right)$$

Observar que al escalar (A/B) también se ha escalonado A por lo que se puede determinar el rango de ambas matrices, y utilizando el teorema de Rouché- Frobenius, discutir el sistema.

Se tiene $\text{rg } A = 2$ y $\text{rg}(A/B) = 2$. Además $\text{rg } A = \text{rg}(A/B) = n^\circ$ de incógnitas = 2, por lo tanto, el sistema es compatible determinado, es decir, tiene una única solución.

Ayuda para el apartado a) Reducción a un sistema de Cramer

Cualquier sistema compatible o bien es de Cramer, o bien se puede transformar en uno que lo sea, lo que proporciona un nuevo método para resolver cualquier sistema compatible.

Sea $AX = B$ un sistema compatible que no es de Cramer, con $\text{rg } A = \text{rg}(A/B) = p$.

Lo transformaremos en un sistema de Cramer realizando los pasos siguientes:

- 1) Consideramos un menor de A de orden p no nulo.
- 2) Si $p < m$, se eliminan las $m-p$ ecuaciones no consideradas en el menor de orden p .
- 3) Si $p < n$, se pasan al término independiente las incógnitas cuyos coeficientes no aparecen en el menor de orden p .

Se obtiene así un sistema de Cramer con p ecuaciones y p incógnitas en cuyos términos independientes pueden aparecer incógnitas. Se resuelve por la regla de Cramer y a partir de su solución se obtiene la solución del sistema inicial.

Ejemplo 5: Dado el sistema :
$$\left. \begin{array}{l} x + y - z = 1 \\ x - y + 3z = 3 \\ 3x + y + z = 5 \end{array} \right\}$$
 para determinar si es un sistema de Cramer calculamos $|A|$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1) + 9 - 1 - 3 - 1 - 3 = 0, \text{ y al ser nulo se concluye que el sistema no es de Cramer.}$$

Vamos a comprobar si es compatible y, en caso afirmativo, lo resolvemos reduciéndolo a uno de Cramer.

Cuando queremos aplicar este método de resolución, conviene estudiar los rangos de A y (A/B) por menores.

$$\text{Como } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0 \text{ y } |A| = 0 \text{ se tiene que } \text{rg } A = 2$$

Para determinar el rango de (A/B) falta orlar el menor no nulo de orden 2 con la columna de términos independientes

$$\text{obteniéndose } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -5 + 9 + 1 + 3 - 5 - 3 = 0 \text{ luego, } \text{rg}(A/B) = 2.$$

Por lo tanto $\text{rg } A = \text{rg}(A/B) = 2 < 3 = n^\circ$ de incógnitas, luego el sistema es compatible indeterminado y el grado de indeterminación es $3 - 2 = 1$.

Para resolverlo vamos a reducirlo a un sistema de Cramer, siguiendo los pasos indicados:

1) Consideramos el menor de orden 2 no nulo utilizado para el cálculo de los rangos $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$

2) Al ser $p = 2 < n^\circ$ de ecuaciones, eliminamos la última ecuación cuyos coeficientes no aparecen en el menor de orden dos anterior quedando el sistema
$$\left. \begin{array}{l} x + y - z = 1 \\ x - y + 3z = 3 \end{array} \right\}$$

3) Al ser $p = 2 < n^\circ$ de incógnitas se pasan al término independiente los sumandos que contienen a la variable z :

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 1 + z \\ x - y = 3 - 3z \end{array} \right\}$$

Este último sistema es de Cramer y aplicando la regla de Cramer se obtiene:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1+z & 1 \\ 3-3z & -1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-1 - z - 3 + 3z}{-2} = \frac{2z - 4}{-2} = -z + 2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1+z \\ 1 & 3-3z \end{vmatrix}}{-2} = \frac{3-3z-1-z}{-2} = \frac{-4z+2}{-2} = 2z-1$$

Por tanto, las soluciones del sistema son $x = -z + 2$, $y = 2z - 1$, $z \in \mathbb{N}$

NOTA: Este sistema también se puede resolver aplicando el Método de Gauss como se procede en el apartado **b)**.

Ayuda para el apartado b) Resolución de un sistema por el Método de Gauss

Consiste en escalar la matriz ampliada realizando operaciones elementales por filas de manera que el sistema representado por la matriz escalonada (equivalente al inicial) es fácilmente resoluble.

Para hallar la solución de este último sistema, se escriben sus ecuaciones y se comienza a despejar las incógnitas partiendo de la última ecuación y sustituyendo en las anteriores, siguiendo un proceso ascendente.

Sólo se pueden realizar operaciones elementales con las filas ya que si se hacen con las columnas el sistema obtenido no es equivalente al dado.

Ejemplo 3: Resolvamos el sistema anterior, cuya matriz ampliada se escalonó obteniéndose $(A/B) \approx \begin{pmatrix} -2 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & | & 8 \end{pmatrix}$

El sistema representado por esta nueva matriz es equivalente al inicial y sus ecuaciones son
$$\left. \begin{array}{l} -2x + y = 2 \\ y = 8 \end{array} \right\}$$

Se resuelve fácilmente despejando y de la segunda ecuación $y = 8$, que sustituida en la primera nos permite calcular x , luego, $-2x + 8 = 2 \Rightarrow -2x = 2 - 8 \Rightarrow x = \frac{-6}{-2} \Rightarrow x = 3$. Por tanto, la solución es $x = 3$, $y = 8$.

NOTA: Este sistema también se podría haber resuelto utilizando el método de reducción a un sistema de Cramer como hemos hecho en el caso **a)**.