Autoras: Gloria Jarne, Esperanza Minguillón, Trinidad Zabal

Producto de matrices

Dadas dos matrices $A = (a_{ij})$ de orden mxp y $B = (b_{ij})$ de orden pxn, la **matriz producto *AB***, es otra matriz de orden mxn en la que el elemento situado en la fila i y en la columna j se obtiene multiplicando la fila i de la matriz A por la columna j de la matiz B de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ip} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ . \\ . \\ . \\ b_{pj} \end{pmatrix} = a_{i1}\, b_{1j} + a_{i2}\, b_{2j} + \dots + a_{ip}\, b_{pj}$$

Ejemplo: $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.3+(-1)(-1) & 2.1+(-1)2 \\ 0.3+3(-1) & 0.1+3.2 \\ -4.3+6(-1) & -4.1+6.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -3 & 6 \\ -18 & 8 \end{pmatrix}$

Teorema de Rouché-Frobenius

Dado un sistema de m ecuaciones con n incógnitas, $AX = B$ se tiene:

$AX = B$ es un sistema compatible $\Leftrightarrow$ rg A = rg$(A|B) = p$

Además: $p = n \Leftrightarrow$ el sistema es determinado (tiene una única solución)

$p < n \Leftrightarrow$ el sistema es indeterminado (tiene infinitas soluciones)

Aplicando este teorema al caso de un **sistema homogéneo** $AX = O$ se obtiene:

- Siempre es compatible, ya que rg A = rg$(A|O)$
- La solución nula o trivial, $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, es siempre solución de dicho sistema .
- Si rg $A = n$, el sistema homogéneo es compatible determinado y la única solución es la nula.
- Si rg $A < n$, el sistema homogéneo es compatible indeterminado y en este caso tiene infinitas soluciones además de la solución nula.

Ejemplo 2: Discutamos el sistema $\left.\begin{matrix} -2x + y = 2 \\ 5x - 2y = -1 \end{matrix}\right\}$ cuya matriz ampliada es $(A|B) = \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 2 \\ 5 & -2 & -1 \end{array}\right)$

En primer lugar se realizan operaciones elementales con las filas hasta escalonar $(A|B)$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 2 \\ 5 & -2 & -1 \end{array}\right) \underset{\approx}{F_2 \to 5F_1 + 2F_2} \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 8 \end{array}\right)$$

Observar que al escalonar $(A|B)$ también se ha escalonado A por lo que se puede determinar el rango de ambas matrices, y utilizando el teorema de Rouché- Frobenius, discutir el sistema.

Se tiene rg $A = 2$ y rg$(A|B) = 2$. Además rg A = rg$(A|B)$ = nº de incógnitas = 2, por lo tanto, el sistema es compatible determinado, es decir, tiene una única solución.

Resolución de un sistema por el Método de Gauss

Autoras: Gloria Jarne, Esperanza Minguillón, Trinidad Zabal

Consiste en escalonar la matriz ampliada realizando operaciones elementales por filas de manera que el sistema representado por la matriz escalonada (equivalente al inicial) es fácilmente resoluble.

Para hallar la solución de este último sistema, se escriben sus ecuaciones y se comienza a despejar las incógnitas partiendo de la última ecuación y sustituyendo en las anteriores, siguiendo un proceso ascendente.

Sólo se pueden realizar operaciones elementales con las filas ya que si se hacen con las columnas el sistema obtenido no es equivalente al dado.

Ejemplo 3: Resolvamos el sistema anterior, cuya matriz ampliada se escalonó obteniéndose $(A|B) \approx \begin{pmatrix} -2 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & | & 8 \end{pmatrix}$

El sistema representado por esta nueva matriz es equivalente al inicial y sus ecuaciones son $\left.\begin{array}{r} -2x + y = 2 \\ y = 8 \end{array}\right\}$

Se resuelve fácilmente despejando y de la segunda ecuación $y = 8$, que sustituida en la primera nos permite calcular x, luego, $-2x + 8 = 2 \Rightarrow -2x = 2 - 8 \Rightarrow x = \frac{-6}{-2} \Rightarrow x = 3$. Por tanto, la solución es $x = 3$, $y = 8$.