Teorema de Rouché-Frobenius

Dado un sistema de m ecuaciones con n incógnitas, $AX = B$ se tiene:

$AX = B$ es un sistema compatible $\Leftrightarrow$ rg A = rg($A|B$) = p

Además: $p = n \Leftrightarrow$ el sistema es determinado (tiene una única solución)

$p < n \Leftrightarrow$ el sistema es indeterminado (tiene infinitas soluciones)

Ejemplo 2: Discutamos el sistema $\left.\begin{array}{r} -2x + y = 2 \\ 5x - 2y = -1 \end{array}\right\}$ cuya matriz ampliada es $(A|B) = \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 2 \\ 5 & -2 & -1 \end{array}\right)$

En primer lugar se realizan operaciones elementales con las filas hasta escalonar ($A|B$)

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 2 \\ 5 & -2 & -1 \end{array}\right) \underset{\approx}{\xrightarrow{F_2 \to 5F_1 + 2F_2}} \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 8 \end{array}\right)$$

Observar que al escalonar ($A|B$) también se ha escalonado A por lo que se puede determinar el rango de ambas matrices, y utilizando el teorema de Rouché- Frobenius, discutir el sistema.

Se tiene rg A = 2 y rg($A|B$) = 2. Además rg A = rg($A|B$) = nº de incógnitas = 2, por lo tanto, el sistema es compatible determinado, es decir, tiene una única solución.

MÉTODOS DE RESOLUCIÓN DE LOS SISTEMAS LINEALES

• Método de Gauss

Consiste en escalonar la matriz ampliada realizando operaciones elementales por filas de manera que el sistema representado por la matriz escalonada (equivalente al inicial) es fácilmente resoluble.

Para hallar la solución de este último sistema, se escriben sus ecuaciones y se comienza a despejar las incógnitas partiendo de la última ecuación y sustituyendo en las anteriores, siguiendo un proceso ascendente.

Sólo se pueden realizar operaciones elementales con las filas ya que si se hacen con las columnas el sistema obtenido no es equivalente al dado.

Ejemplo 3: Resolvamos el sistema anterior, cuya matriz ampliada se escalonó obteniéndose $(A|B) \approx \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 8 \end{array}\right)$

El sistema representado por esta nueva matriz es equivalente al inicial y sus ecuaciones son $\left.\begin{array}{r} -2x + y = 2 \\ y = 8 \end{array}\right\}$

Se resuelve fácilmente despejando y de la segunda ecuación $y = 8$, que sustituida en la primera nos permite calcular x, luego , $-2x + 8 = 2 \Rightarrow -2x = 2 - 8 \Rightarrow x = \dfrac{-6}{-2} \Rightarrow x = 3$. Por tanto, la solución es $x = 3$, $y = 8$.

• Regla de Cramer

Se dice que un sistema $AX = B$ de m ecuaciones con n incógnitas es de **Cramer** si:

i) Tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas, es decir $m = n$

ii) $|A| \neq 0$, es decir, rg $A = n$

Discusión: Todo sistema de Cramer es compatible determinado ya que rg A = rg$(A|B) = n$.

Resolución: Como $|A| \neq 0$, existe A^{-1}, lo que permite despejar X:

$$AX = B \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B \text{ única solución del sistema.}$$

Esta misma solución se puede calcular de otra forma, utilizando lo que se conoce como **regla de Cramer**:

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|} \qquad \text{para } i = 1, 2, \dots, n$$

Observar que la matriz cuyo determinante aparece en el numerador se obtiene cambiando en la matriz A la columna i-ésima por la columna de los términos independientes.

Ejemplo 4: Vamos a comprobar que el sistema resuelto por el método de Gauss en el ejemplo 3 es un sistema de Cramer y lo resolveremos por cálculo matricial y aplicando la regla de Cramer.

El sistema $\left.\begin{matrix} -2x + y = 2 \\ 5x - 2y = -1 \end{matrix}\right\}$ tiene dos ecuaciones con dos incógnitas y el determinante de su matriz de coeficientes es

$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = (-2)\,(-2) - 1.5 = -1 \neq 0$, luego es un sistema de Cramer.

Vamos a calcular su solución.

Cálculo matricial

$X = A^{-1} B$, es decir, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Hallamos A^{-1} mediante operaciones elementales:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\approx}{F_1 \to -1/2F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1/2 & -1/2 & 0 \\ 5 & -2 & & 0 \;\; 1 \end{array}\right) \underset{\approx}{F_2 \to F_2 - 5F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 5/2 & 1 \end{array}\right) \underset{\approx}{F_1 \to F_1 + F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1/2 & 5/2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\approx}{F_2 \to 2F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \end{array}\right)$$

Entonces $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ y la solución del sistema es

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.2 + 1.(-1) \\ 5.2 + 2.(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$, por tanto, $x = 3$, $y = 8$.

Regla de Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-3}{-1} = 3 \quad ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-8}{-1} = 8$$

Observar que la solución es la misma independientemente del método utilizado para su obtención.

• Reducción a un sistema de Cramer

Cualquier sistema compatible o bien es de Cramer, o bien se puede transformar en uno que lo sea, lo que proporciona un nuevo método para resolver cualquier sistema compatible.

Sea $AX = B$ un sistema compatible que no es de Cramer, con rg A = rg$(A|B)$ = p.

Lo transformaremos en un sistema de Cramer realizando los pasos siguientes:

1) Consideramos un menor de A de orden p no nulo.

2) Si $p < m$, se eliminan las m-p ecuaciones no consideradas en el menor de orden p.

3) Si $p < n$, se pasan al término independiente las incógnitas cuyos coeficientes no aparecen en el menor de orden p.

Se obtiene así un sistema de Cramer con p ecuaciones y p incógnitas en cuyos términos independientes pueden aparecer incógnitas. Se resuelve por la regla de Cramer y a partir de su solución se obtiene la solución del sistema inicial.

Ejemplo 5: Dado el sistema : $\left.\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ x - y + 3z &= 3 \\ 3x + y + z &= 5 \end{aligned}\right\}$ para determinar si es un sistema de Cramer calculamos $|A|$.

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1) + 9 - 1 - 3 - 1 - 3 = 0$, y al ser nulo se concluye que el sistema no es de Cramer.

Vamos a comprobar si es compatible y, en caso afirmativo, lo resolvemos reduciéndolo a uno de Cramer.

Cuando queremos aplicar este método de resolución, conviene estudiar los rangos de A y $(A|B)$ por menores.

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 -1 = -2 \neq 0$ y $|A| = 0$ se tiene que rg $A = 2$

Para determinar el rango de $(A|B)$ falta orlar el menor no nulo de orden 2 con la columna de términos independientes obteniéndose $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -5 + 9 + 1 + 3 - 5 - 3 = 0$ luego, rg$(A|B) = 2$.

Por lo tanto rg A = rg$(A|B)$ = 2 < 3 = nº de incógnitas, luego el sistema es compatible indeterminado y el grado de indeterminación es 3 – 2 =1.

Para resolverlo vamos a reducirlo a un sistema de Cramer, siguiendo los pasos indicados:

1) Consideramos el menor de orden 2 no nulo utilizado para el cálculo de los rangos $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$

2) Al ser $p = 2 <$ nº de ecuaciones, eliminamos la última ecuación cuyos coeficientes no aparecen en el menor de orden dos anterior quedando el sistema $\left.\begin{array}{r} x + y - z = 1 \\ x - y + 3z = 3 \end{array}\right\}$

3) Al ser $p = 2 <$ nº de incógnitas se pasan al término independiente los sumandos que contienen a la variable z:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 1 + z \\ x - y = 3 - 3z \end{array}\right\}$$

Este último sistema es de Cramer y aplicando la regla de Cramer se obtiene:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1+z & 1 \\ 3-3z & -1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-1-z-3+3z}{-2} = \frac{2z-4}{-2} = -z+2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1+z \\ 1 & 3-3z \end{vmatrix}}{-2} = \frac{3-3z-1-z}{-2} = \frac{-4z+2}{-2} = 2z-1$$

Por tanto, las soluciones del sistema son $x = -z + 2$, $y = 2z - 1$, $z \in$ Ñ