5. Mediante operaciones elementales, determinar el rango de las siguientes matrices según el valor del parámetro real a.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & a \end{pmatrix}$ **b)** $B = \begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ **c)** $C = \begin{pmatrix} 2 & a \\ 6 & 4+a \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ **d)** $D = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$

Solución

a) Escalonamos la matriz A mediante operaciones elementales por filas:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & a \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_2 \to F_2 - 4F_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & a-12 \end{pmatrix}$$

El número de filas no nulas de la matriz escalonada equivalente a A que se ha obtenido depende de que la expresión $a - 12$ sea nula o no lo sea. Así:

- si $a = 12$, entonces la matriz escalonada tiene una fila no nula y, por tanto, rg $A = 1$
- si $a \neq 12$, entonces la matriz escalonada tiene dos fila no nulas y, por tanto, rg $A = 2$

b) Escalonamos la matriz B mediante operaciones elementales por filas:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ 6 & 3 & 4 \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_2 \to F_2 - 3F_1} \begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ 0 & 3-3a & 1 \end{pmatrix}$$

El número de filas no nulas de la matriz escalonada equivalente a B que se ha obtenido es 2 independientemente de lo que valga el parámetro a. Así, rg $B = 2$ para cualquier valor de a.

c) Escalonamos la matriz C mediante operaciones elementales por filas:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & a \\ 6 & 4+a \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_2 \to F_2 - 3F_1,\ F_3 \to F_3 - 2F_1} \begin{pmatrix} 2 & a \\ 0 & 4-2a \\ 0 & 6-2a \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_3 \to (4-2a)F_3 - (6-2a)F_2} \begin{pmatrix} 2 & a \\ 0 & 4-2a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El número de filas no nulas de la matriz escalonada equivalente a C que se ha obtenido depende de que la expresión $4 - 2a$ sea nula o no lo sea. Así:

- si $a = 2$, entonces la matriz escalonada tiene una fila no nula y, por tanto, rg $C = 1$
- si $a \neq 2$, entonces la matriz escalonada tiene dos fila no nulas y, por tanto, rg $C = 2$

d) Escalonamos la matriz D mediante operaciones elementales por filas:

$$D = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_1 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_2 \to F_2 - F_1,\ F_3 \to F_3 - aF_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 1-a & 1-a^2 \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_3 \to F_3 + F_2}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 \end{pmatrix}$$

El número de filas no nulas de la matriz escalonada equivalente a D que se ha obtenido depende de que las expresiones $1 - a$ y $2 - a - a^2$ sean nulas o no lo sean. Teniendo en cuenta que

$$2 - a - a^2 = 0 \Rightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{-2} = \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}$$

$$1 - a = 0 \Rightarrow a = 1$$

se distinguen los siguientes casos:

- si $a \neq 1$ y $a \neq -2$ entonces la matriz escalonada tiene tres filas no nulas y, por tanto, rg $D = 3$
- si $a = -2$ entonces la matriz escalonada tiene dos filas no nulas y, por tanto, rg $D = 2$
- si $a = 1$ entonces la matriz escalonada tiene una fila no nula y, por tanto, rg $D = 1$