4. Mediante operaciones elementales transformar A en una matriz escalonada equivalente y calcular el rango de A.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 10 & -11 \end{pmatrix}$ **b)** $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ **c)** $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ **d)** $A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 1 & 4 \\ 6 & -7 & -2 & -5 \\ 4 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Solución

No existe un solo conjunto de operaciones elementales con las que escalonar una matriz. Por tanto, para cada matriz, la matriz escalonada equivalente que se obtiene no es única, aunque todas han de tener el mismo número de filas nulas ya que el rango de una matriz es único.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 10 & -11 \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_2 \to F_2 - 2F_1,\ F_3 \to F_3 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & 6 & -10 \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_3 \to F_3 + 2F_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

La matriz escalonada equivalente a A obtenida tiene dos filas no nulas, por tanto, rg A = 2.

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_2 \to F_2 - 3F_1,\ F_3 \to F_3 - 5F_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -11 \\ 0 & -22 \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_3 \to F_3 - 2F_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -11 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

La primera operación elemental que se realiza, intercambiar la primera y segunda fila, tiene como objetivo obtener como "elemento pivote" el valor 1, lo que facilitará las posteriores operaciones elementales.

La matriz escalonada equivalente a A obtenida tiene dos filas no nulas, por tanto, rg A = 2.

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_1 \to (1/2)F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_2 \to F_2 - 5F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$

La primera operación elemental que se realiza, multiplicar la primera fila por $\frac{1}{2}$, tiene como objetivo obtener como "elemento pivote" el valor 1, lo que facilitará las posteriores operaciones elementales.

La matriz escalonada equivalente a A obtenida tiene dos filas no nulas, por tanto, rg A = 2.

Otra manera de escalonar la matriz A es la siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_2 \to 2F_2 - 5F_1} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -14 \end{pmatrix}$$

d) La matriz A se puede escalonar haciendo operaciones elementales por filas y por columnas, como se muestra a continuación.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 1 & 4 \\ 6 & -7 & -2 & -5 \\ 4 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\approx}{C_1 \leftrightarrow C_3} \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 & 4 \\ -2 & -7 & 6 & -5 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_2 \to F_2 + 2F_1,\ F_3 \to F_3 - F_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & -6 & 7 & -4 \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_3 \to F_3 + 2F_2} \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

La matriz escalonada equivalente a A obtenida tiene tres filas no nulas, por tanto, rg A = 3.