3. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 0 & 9 & 5 \\ -6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Calcular AB y BA, ¿coinciden los resultados?.

b) Calcular $(A + B)^2$ y $A^2 + 2AB + B^2$, ¿coinciden los resultados?.

c) Calcular $A^2 - B^2$ y $(A + B)(A - B)$, ¿coinciden los resultados?.

Solución

a) $$AB = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 0 & 9 & 5 \\ -6 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.1+6.2+3.3 & 2.1+6(-4)+3.5 & 2.1+6.2+3.7 \\ 0.1+9.2+5.3 & 0.1+9(-4)+5.5 & 0.1+9.2+5.7 \\ -6.1+2.2+1.3 & -6.1+2.(-4)+1.5 & -6.1+2.2+1.7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 23 & -7 & 35 \\ 33 & -11 & 53 \\ 1 & -9 & 5 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 0 & 9 & 5 \\ -6 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.2+1.0+1(-6) & 1.6+1.9+1.2 & 1.3+1.5+1.1 \\ 2.2+(-4)0+2(-6) & 2.6+(-4)9+2.2 & 2.3+(-4).5+2.1 \\ 3.2+5.0+7(-6) & 3.6+5.9+7.2 & 3.3+5.5+7.1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & 17 & 9 \\ -8 & -20 & -12 \\ -36 & 77 & 41 \end{pmatrix}$$

No coinciden los resultados, es decir, $AB \neq BA$, lo que significa que el producto de matrices no verifica la propiedad conmutativa.

b) $$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 0 & 9 & 5 \\ -6 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 & 6+1 & 3+1 \\ 0+2 & 9+(-4) & 5+2 \\ -6+3 & 2+5 & 1+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 \\ 2 & 5 & 7 \\ -3 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 \\ 2 & 5 & 7 \\ -3 & 7 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 \\ 2 & 5 & 7 \\ -3 & 7 & 8 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3.3+7.2+4(-3) & 3.7+7.5+4.7 & 3.4+7.7+4.8 \\ 2.3+5.2+7(-3) & 2.7+5.5+7.7 & 2.4+5.7+7.8 \\ (-3)3+7.2+8(-3) & (-3)7+7.5+8.7 & (-3)4+7.7+8.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 84 & 93 \\ -5 & 88 & 99 \\ -19 & 70 & 101 \end{pmatrix}$$

A continuación, se calcula $A^2 + 2AB + B^2$,

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 0 & 9 & 5 \\ -6 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 0 & 9 & 5 \\ -6 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.2+6.0+3(-6) & 2.6+6.9+3.2 & 2.3+6.5+3.1 \\ 0.2+9.0+5(-6) & 0.6+9.9+5.2 & 0.3+9.5+5.1 \\ -6.2+2.0+1(-6) & -6.6+2.9+1.2 & -6.3+2.5+1.1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -14 & 72 & 39 \\ -30 & 91 & 50 \\ -18 & -16 & -7 \end{pmatrix}$$

La matriz AB se ha calculado en el apartado a), así

$$2AB = 2\begin{pmatrix} 23 & -7 & 35 \\ 33 & -11 & 53 \\ 1 & -9 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.23 & 2(-7) & 2.35 \\ 2.33 & 2(-11) & 2.53 \\ 2.1 & 2(-9) & 2.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 46 & -14 & 70 \\ 66 & -22 & 106 \\ 2 & -18 & 10 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = BB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1+1.2+1.3 & 1.1+1(-4)+1.5 & 1.1+1.2+1.7 \\ 2.1+(-4)2+2.3 & 2.1+(-4)(-4)+2.5 & 2.1+(-4)2+2.7 \\ 3.1+5.2+7.3 & 3.1+5(-4)+7.5 & 3.1+5.2+7.7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 2 & 10 \\ 0 & 28 & 8 \\ 34 & 18 & 62 \end{pmatrix}$$

Por tanto, $A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} -14 & 72 & 39 \\ -30 & 91 & 50 \\ -18 & -16 & -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 46 & -14 & 70 \\ 66 & -22 & 106 \\ 2 & -18 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 2 & 10 \\ 0 & 28 & 8 \\ 34 & 18 & 62 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} -14+46+6 & 72+(-14)+2 & 39+70+10 \\ -30+66+0 & 91+(-22)+28 & 50+106+8 \\ -18+2+34 & -16+(-18)+18 & -7+10+62 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 & 60 & 119 \\ 36 & 97 & 164 \\ 18 & -16 & 65 \end{pmatrix}$$

En conclusión, $(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.

La igualdad que en realidad se cumple es $(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = A^2 + AB + BA + B^2$, y sólo en aquellos casos en los que se verifique que $AB = BA$, se cumplirá que $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

c) En el apartado b) se han calculado A^2 y B^2, por tanto,

$$A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} -14 & 72 & 39 \\ -30 & 91 & 50 \\ -18 & -16 & -7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 2 & 10 \\ 0 & 28 & 8 \\ 34 & 18 & 62 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14-6 & 72-2 & 39-10 \\ -30-0 & 91-28 & 50-8 \\ -18-34 & -16-18 & -7-62 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 & 70 & 29 \\ -30 & 63 & 42 \\ -52 & -34 & -69 \end{pmatrix}$$

Para calcular $(A + B)(A - B)$, se ha de calcular cada uno de los factores, el primero se ha calculado en el apartado b) y el segundo es,

$$A - B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 0 & 9 & 5 \\ -6 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 & 6-1 & 3-1 \\ 0-2 & 9-(-4) & 5-2 \\ -6-3 & 2-5 & 1-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -2 & 13 & 3 \\ -9 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$

Por tanto, $(A + B)(A – B) = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 \\ 2 & 5 & 7 \\ -3 & 7 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -2 & 13 & 3 \\ -9 & -3 & -6 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 3.1+7(-2)+4(-9) & 3.5+7.13+4(-3) & 3.2+7.3+4(-6) \\ 2.1+5(-2)+7(-9) & 2.5+5.13+7(-3) & 2.2+5.3+7(-6) \\ (-3).1+7(-2)+8(-9) & (-3).5+7.13+8(-3) & (-3).2+7.3+8(-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -47 & 94 & 3 \\ -71 & 54 & -23 \\ -89 & 52 & -33 \end{pmatrix}$$

En conclusión, $A^2 - B^2 \neq (A + B)\ (A – B)$.

La igualdad que en realidad se cumple es $(A + B)\ (A – B) = A^2 - AB + BA - B^2$, y al ser $AB \neq BA$, como se ha comprobado en el apartado a), no se verifica $(A + B)\ (A – B) = A^2 - B^2$.