2. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, calcular si es posible:

a) ABC **b)** $C^t\left(\frac{1}{2}B\text{-}A\right)$ **c)** A^2, B^2 y C^2

Solución

a) Para calcular ABC, se calcula primero el producto AB y el resultado se multiplica a la derecha por la matriz C.

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.0+(-1)4 & 2.1+(-1)(-2) \\ 3.0+2.4 & 3.1+2(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$$

Así, $(AB)C = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-4).1+4.2 & (-4)3+4(-1) & (-4).5+4.1 \\ 8.1+(-1)2 & 8.3+(-1)(-1) & 8.5+(-1)1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -16 & -16 \\ 6 & 25 & 39 \end{pmatrix}$$

Por la propiedad asociativa del producto de matrices, el resultado sería el mismo si primero se calculase BC y el resultado se multiplicara a la izquierda por A.

b) En primer lugar se calcula la matriz traspuesta de C intercambiando sus filas y sus columnas,

$$C^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

A continuación se calcula $\frac{1}{2}B\text{-}A$,

$$\frac{1}{2}B\text{-}A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}.0 & \frac{1}{2}.1 \\ \frac{1}{2}.4 & \frac{1}{2}(-2) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\text{-}2 & \frac{1}{2}\text{-}(-1) \\ 2\text{-}3 & -1\text{-}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Así, $C^t\left(\frac{1}{2}B\text{-}A\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1(-2)+2(-1) & 1\frac{3}{2}+2(-3) \\ 3(-2)+(-1)(-1) & 3\frac{3}{2}+(-1)(-3) \\ 5(-2)+1(-1) & 5\frac{3}{2}+1(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & \frac{-9}{2} \\ -5 & \frac{15}{2} \\ -11 & \frac{9}{2} \end{pmatrix}$

c) $A^2 = AA = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.2+(-1)3 & 2(-1)+(-1)2 \\ 3.2+2.3 & 3(-1)+2.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 12 & 1 \end{pmatrix}$

$$B^2 = BB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0+1.4 & 0.1+1(-2) \\ 4.0+(-2)4 & 4.1+(-2)(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -8 & 8 \end{pmatrix}$$

No se puede calcular $C^2 = CC$, ya que C no es una matriz cuadrada.