Suma de matrices

Dadas dos matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ de orden $m \times n$, la **matriz suma *A + B***, es otra matriz de orden $m \times n$ que se obtiene sumando los elementos de A y B que ocupan la misma posición. Así, $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$.

Ejemplo: $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ -7 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+3 & 4+(-4) & 2+5 \\ 0+(-7) & -2+3 & \frac{1}{2}+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 \\ -7 & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

Producto de un número real por una matriz

Dados una matriz $A = (a_{ij})$ de orden $m \times n$ y un número real t, la **matriz producto *t.A***, es otra matriz de orden $m \times n$ que se obtiene multiplicando cada elemento de A por t. Así, $t.A = (t\ a_{ij})$.

Ejemplo: $5 \,.\, \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5(-1) & 5.3 \\ 5.4 & 5.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 15 \\ 20 & 0 \end{pmatrix}$

Producto de matrices

Dadas dos matrices $A = (a_{ij})$ de orden $m \times p$ y $B = (b_{ij})$ de orden $p \times n$, la **matriz producto *AB***, es otra matriz de orden $m \times n$ en la que el elemento situado en la fila i y en la columna j se obtiene multiplicando la fila i de la matriz A por la columna j de la matiz B de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ip} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ . \\ . \\ . \\ b_{pj} \end{pmatrix} = a_{i1}\, b_{1j} + a_{i2}\, b_{2j} + \dots + a_{ip}\, b_{pj}$$

Ejemplo: $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.3+(-1)(-1) & 2.1+(-1)2 \\ 0.3+3(-1) & 0.1+3.2 \\ -4.3+6(-1) & -4.1+6.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -3 & 6 \\ -18 & 8 \end{pmatrix}$

Trasposición de matrices

Dada una matriz $A = (a_{ij})$ de orden $m \times n$, la **matriz traspuesta $\boldsymbol{A^t}$**, es una matriz de orden $n \times m$ que se obtiene intercambiando las filas y las columnas de A.

Ejemplo: La matriz traspuesta de $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es $A^t = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Operaciones elementales

Se llama **operación elemental** realizada en una matriz a cualquiera de las transformaciones siguientes:

a) cambiar entre sí dos filas (columnas).

Se puede representar por $F_i \leftrightarrow F_j$, siendo F_i y F_j dos filas de la matriz ($C_i \leftrightarrow C_j$, siendo C_i y C_j dos columnas de la matriz)

b) multiplicar una fila (columna) por un número real distinto de cero.

Se puede representar por $F_i \to t\, F_i$ ($C_i \to t\, C_i$)

c) sumar a una fila (columna) otra fila (columna) multiplicada por un número real.

Se puede representar por $F_i \to F_i + t\, F_j$ ($C_i \to C_i + t\, C_j$)

Dos matrices A y B son **equivalentes** si una de ellas se puede obtener a partir de la otra mediante operaciones elementales. Se puede representar por $\boldsymbol{A \approx B}$.

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_1 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \underset{\approx}{C_2 \to -3C_2} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -6 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_1 \to F_1+2F_2} \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Cálculo de la matriz inversa por el método de Gauss

Para obtener la matriz inversa de A se considera la matriz $(A|I_n)$ y se realizan aquellas operaciones elementales por filas que consigan transformar la matriz A en la matriz I_n, de esta forma la matriz I_n se habrá transformado en A^{-1}. Es decir, se han de realizar operaciones elementales por filas de forma que $(A|I_n) \approx \ldots \approx (I_n|A^{-1})$.

También es posible obtener la matriz inversa de A mediante operaciones elementales por columnas de forma que $\left(\frac{A}{I_n}\right) \approx \ldots \approx \left(\frac{I_n}{A^{-1}}\right)$.

Ejemplo: Se calcula la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ mediante operaciones elementales por filas.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\approx}{F_2 \to F_2+F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{\approx}{F_1 \to F_1-3F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{\approx}{F_1 \to -F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Los objetivos de las operaciones elementales realizadas son:

1ª equivalencia: se obtienen ceros por debajo de la diagonal principal (se triangulariza superiormente).

2ª equivalencia: se obtienen ceros por encima de la diagonal principal (se triangulariza inferiormente).

3ª equivalencia: se obtienen unos en la diagonal principal.

Por tanto, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.