

OPERACIONES ELEMENTALES

Se llama **operación elemental** realizada en una matriz a cualquiera de las transformaciones siguientes:

a) cambiar entre sí dos filas (columnas).

Se puede representar por $F_i \leftrightarrow F_{j'}$, siendo F_i y F_j dos filas de la matriz ($C_i \leftrightarrow C_{j'}$, siendo C_i y C_j dos columnas de la matriz)

b) multiplicar una fila (columna) por un número real distinto de cero.

Se puede representar por $F_i \rightarrow t F_i$ ($C_i \rightarrow t C_i$)

c) sumar a una fila (columna) otra fila (columna) multiplicada por un número real.

Se puede representar por $F_i \rightarrow F_i + t F_j$ ($C_i \rightarrow C_i + t C_j$)

Dos matrices A y B son **equivalentes** si una de ellas se puede obtener a partir de la otra mediante operaciones elementales. Se puede representar por $A \approx B$.

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} F_1 \leftrightarrow F_3 \approx \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} C_2 \rightarrow -3C_2 \approx \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -6 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} F_1 \rightarrow F_1 + 2F_2 \approx \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

CÁLCULO DE LA MATRIZ INVERSA POR EL MÉTODO DE GAUSS

Para obtener la matriz inversa de A se considera la matriz $(A|I_n)$ y se realizan aquellas operaciones elementales por filas que consigan transformar la matriz A en la matriz I_n , de esta forma la matriz I_n se habrá transformado en A^{-1} . Es decir, se han de realizar operaciones elementales por filas de forma que $(A|I_n) \approx \dots \approx (I_n|A^{-1})$.

También es posible obtener la matriz inversa de A mediante operaciones elementales por columnas de forma que $\begin{pmatrix} A \\ I_n \end{pmatrix} \approx \dots \approx \begin{pmatrix} I_n \\ A^{-1} \end{pmatrix}$.

Ejemplo: Se calcula la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ mediante operaciones elementales por filas.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) F_2 \rightarrow F_2 + F_1 \approx \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) F_1 \rightarrow F_1 - 3F_2 \approx \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) F_1 \rightarrow -F_1 \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Los objetivos de las operaciones elementales realizadas son:

1ª equivalencia: se obtienen ceros por debajo de la diagonal principal (se triangulariza superiormente).

2ª equivalencia: se obtienen ceros por encima de la diagonal principal (se triangulariza inferiormente).

3ª equivalencia: se obtienen unos en la diagonal principal.

Por tanto, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.