Autoras: Gloria Jarne, Esperanza Minguillón, Trinidad Zabal

PROPIEDADES

1. Si en una matriz se intercambian entre sí dos filas (columnas) el determinante cambia de signo.

2. Si en una matriz se multiplica una fila (columna) por un número real, el determinante de la matriz resultante es igual al determinante de la matriz inicial multiplicado por dicho número.

3. Si en una matriz se suma a una fila (columna) el producto de otra fila (columna) por un número real, el determinante no varía.

4. El determinante de una matriz con una fila (columna) cuyos elementos son ceros es nulo.

5. El determinante de una matriz con dos filas (columnas) iguales es nulo.

6. El determinante de una matriz con dos filas (columnas) proporcionales es nulo.

7. Si A y B son matrices cuadradas del mismo orden entonces $|AB| = |A|.|B|$

8. $|A^t| = |A|$

9. Si A es una matriz cuadrada de orden n y t es un número real entonces $|tA| = t^n|A|$

10. Si A es una matriz regular entonces $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$

11. El determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

El cálculo de determinantes se simplifica utilizando algunas de las propiedades anteriores, con el objeto de obtener el máximo número de ceros en la fila (columna) elegida para desarrollar el determinante.

Ejemplo 6: Para calcular $|A| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & 2 \\ -4 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, elegimos una fila o columna, por ejemplo la segunda fila, para efectuar el desarrollo. Previamente, vamos a hacer que sean cero los dos últimos elementos de dicha fila, aplicando algunas propiedades de los determinantes.

Así, $|A| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & 2 \\ -4 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} \underset{=}{C_3 \to C_3 + C_2} \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 6 & 2 \\ -4 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} \underset{=}{C_4 \to C_4 - 3C_2} \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 6 & -1 \\ -4 & 2 & 4 & -3 \end{vmatrix} =$

$$= 0.\,A_{21} + 1.\,A_{22} + 0.\,A_{23} + 0.\,A_{24} = A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 2 & 6 & -1 \\ -4 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 36 + 4 - 16 - 48 + 6 - 8 = -26$$