CÁLCULO

A cualquier matriz cuadrada A se le puede asociar un número real, que se denomina **determinante** de A. Este número se suele simbolizar $|A|$ o det(A) y se calcula como se explica a continuación.

- Determinante de **orden 1**: $|A| = |a_{11}| = a_{11}$

  Ejemplo 1: $|3| = 3$, $|-3| = -3$ (No confundir el determinante de orden uno con el valor absoluto o módulo de un número real)

- Determinante de **orden 2**: $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}$

  Ejemplo 2: $\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 4.8 - (-1)5 = 32 + 5 = 37$

- Determinante de **orden 3** (Regla de Sarrus):

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{13}\, a_{21}\, a_{32} - a_{13}\, a_{22}\, a_{31} - a_{12}\, a_{21}\, a_{33} - a_{11}\, a_{23}\, a_{32}$$

  Ejemplo 3: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 6 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 1(-5)(-2) + 2.6.4 + 3.0(-1) - 3(-5)4 - 2.0(-2) - 1.6(-1) = 10 + 48 + 0 + 60 - 0 + 6 = 124$

- Determinante de **orden *n***:

  Como resultados previos para este cálculo es necesario conocer los conceptos de menor complementario y de adjunto del elemento a_{ij} de una matriz cuadrada A.

  - **Menor complementario** del elemento a_{ij} de una matriz A es el determinante de la matriz que se obtiene al quitar la fila i y la columna j de la matriz A.

  - **Adjunto** del elemento a de una matriz A es el producto de $(-1)^{i+j}$ por el menor complementario del elemento a_{ij}. Se simboliza A_{ij}.

  Ejemplo 4: Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

  a) El menor complementario del elemento a_{23} de A es, $\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = (-2).2 - 0.2 = -4$, este determinante es el de la submatriz de A obtenida al quitarle la segunda fila y la tercera columna.

  b) El adjunto del elemento a_{23} de A es: $A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -(-4) = 4$

  El **determinante de una matriz cuadrada *A* de orden *n*** se calcula efectuando la suma de los productos de los elementos de una fila o columna por sus respectivos adjuntos, es decir:.

  $|A| = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \ldots + a_{in} A_{in}$ (desarrollo por la fila i)

  $|A| = a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \ldots + a_{nj} A_{nj}$ (desarrollo por la columna j)

  Ejemplo 5: Para calcular $|A| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & 2 \\ -4 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, en primer lugar elegimos una fila o columna para desarrollar el determinante, por ejemplo la segunda fila.

Así, $|A| = 0.\ A_{21} + 1.\ A_{22} + (-1)\ A_{23} + 3.\ A_{24} = A_{22} - A_{23} + 3.\ A_{24}$

A continuación calculamos los adjuntos necesarios, mediante la Regla de Sarrus.

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ -4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -30 + 0 + 4 + 20 - 0 + 8 = 2$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -(-6 - 8 + 4 + 4 - 6 + 8) = 4$$

$$A_{24} = (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \\ -4 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -4 - 20 + 0 - 0 - 4 + 20 = -8$$

En consecuencia $|A| = 2 - 4 + 3(-8) = -26$

filas y columnas de A se tiene que rg $A = 2$.