Autoras: Gloria Jarne, Esperanza Minguillón, Trinidad Zabal

EJERCICIOS RESUELTOS DE DETERMINANTES

1. Calcular los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} -5 & 13 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix}$

Solución

a) $\begin{vmatrix} -5 & 13 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = (-5)(-3) - 4.13 = 15 - 52 = -37$

b) $\begin{vmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 8(-1)(-4) + 1(-1)1 + 0 - 0 - 1.3(-4) - 8.3(-1) = 32 - 1 + 12 + 24 = 67$

2. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcular:

a) El menor complementario del elemento a_{21}

b) El adjunto del elemento a_{32}

Solución

a) Para calcular el menor complementario del elemento a_{21}, se escribe el determinante de la matriz eliminando la segunda fila y la primera columna, $\begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$

b) $A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -3$

3. Calcular $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ **a**) Por la regla de Sarrus **b)** Desarrollando por la segunda columna

Solución

a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2\,\frac{1}{2}\,4 + 3(-1)(-2) + 0 - (-1)\,\frac{1}{2}\,(-2) - 0 - (-2) = 4 + 6 - 1 + 2 = 11$

b) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 3\,A_{12} + \frac{1}{2}\,A_{22} + 1\,A_{32}$

Calculamos cada uno de los adjuntos: $A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -(0 - 2) = 2$

$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 2 = 6$ $A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -(-2) = 2$

Y sustituimos en el desarrollo del determinante:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 3\,A_{12} + \frac{1}{2}\,A_{22} + 1\,A_{32} = 3.2 + \frac{1}{2}6 + 2 = 6 + 3 + 2 = 11$$

4. Escribir las propiedades de los determinantes que nos permiten asegurar que son ciertas las siguientes igualdades:

a) $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 10 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & -1 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$

d) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -3 & 0 & 7 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 7 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ **e)** $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 4 & -3 & 2 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$ **f)** $\begin{vmatrix} 4 & 20 & 8 \\ 4 & 20 & -1 \\ -3 & -15 & -1 \end{vmatrix} = 0$

Solución

a) "Si en una matriz se multiplica una fila (columna) por un número real, el determinante de la matriz resultante es igual al determinante de la matriz inicial multiplicado por dicho número".

Se observa que en este caso la segunda columna de la matriz inicial se multiplica por 1/2 para obtener la segunda columna de la otra matriz.

b) "$|A^t| = |A|$"

c) "El determinante de una matriz con una fila (columna) cuyos elementos son ceros es nulo".

d) "Si en una matriz se intercambian entre sí dos filas (columnas) el determinante cambia de signo".

Se observa que se han intercambiado F_1 y F_3.

e) "El determinante de una matriz con dos filas (columnas) iguales es nulo".

Se observa que $F_1 = F_3$.

f) "El determinante de una matriz con dos filas (columnas) proporcionales es nulo".

Se observa que $C_2 = 5\,C_1$.

5. Decir si las siguientes matrices son regulares y en caso afirmativo calcular su inversa mediante adjuntos.

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ **b)** $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 6 & -3 & 0 \\ -2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ **c)** $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Solución

a) Al ser una matriz 2□3 no es cuadrada y, por lo tanto no tiene inversa

b) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 6 & -3 & 0 \\ -2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0 + 54 + 0 - 18 + 0 - 36 - 0 = 0$

Al ser el determinante igual a cero la matriz no tiene inversa.

c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 + 6 - 1 - 0 + 2 + 2 = 9 \neq 0$

Al ser el determinante distinto de cero la matriz tiene inversa. Para calcular A^{-1}, en primer lugar hallaremos los adjuntos de todos los elementos.

$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1$ $\qquad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = -(-2 - 6) = 8$

$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} = 1$ $\qquad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -(2 - 1) = -1$

$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 6 = 10$ $\qquad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} = -(-2 - 6) = 8$

$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ $\qquad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -(2 - 1) = -1$

$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$

La matriz adjunta de A es $\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 1 \\ -1 & 10 & 8 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz inversa de A es

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,(\text{Adj}(A))^t = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 8 & 10 & -1 \\ 1 & 8 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{-1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{10}{9} & \frac{-1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{8}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

6. Mediante adjuntos, calcular la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & a & a \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, para aquellos valores del parámetro real a que sea posible.

Solución

Calculamos el determinante de A para hallar los valores del parámetro a que hacen que la matriz sea regular.

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & a & a \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3a + 4a - 2a = 5a$, si el determinante es cero, la matriz no será regular

Como la ecuación $5a = 0$ tiene por solución $a = 0$, esta matriz tiene matriz inversa para valores de a distintos de 0. Para estos valores de a, los adjuntos son:

$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a & a \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3a$ $\qquad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & a \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(-2a) = 2a$

$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & a \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2a$ $\qquad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -6$

$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1$ $\qquad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -(-4) = 4$

$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ a & a \end{vmatrix} = 2a - a = a$ $\qquad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{vmatrix} = -a$

$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & a \end{vmatrix} = a$

Por tanto, $\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 3a & 2a & -2a \\ -6 & 1 & 4 \\ a & -a & a \end{pmatrix}$ y $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,(\text{Adj}(A))^t = \frac{1}{5a}\begin{pmatrix} 3a & -6 & a \\ 2a & 1 & -a \\ -2a & 4 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-6}{5a} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5a} & \frac{-1}{5} \\ \frac{-2}{5} & \frac{4}{5a} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

7. Calcular, mediante menores, el rango de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -4 & 10 \end{pmatrix}$ **b)** $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 6 & 10 & -2 \end{pmatrix}$ **c)** $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ **d)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 5 & -1 & 3 \\ 13 & -11 & 19 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Solución

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -4 & 10 \end{pmatrix}$

El menor de orden 1 considerando F_1 y C_1 es $|2| \neq 0$, por tanto, rg $A \geq 1$.

Orlando el anterior menor con F_2 y C_2 se tiene $\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -4 & 10 \end{vmatrix} = 20 - 20 = 0$, por tanto, y al no haber más menores de orden 2, se concluye que rg $A = 1$.

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 6 & 10 & -2 \end{pmatrix}$

Buscamos un menor de orden 2 no nulo.

Considerando F_1F_2 y C_1C_2, $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 10 \end{vmatrix} = 30 - 30 = 0$.

Considerando F_1F_2 y C_1C_3, $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = -6 + 6 = 0$.

Considerando F_1F_2 y C_2C_3, $\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 10 & -2 \end{vmatrix} = -10 + 10 = 0$.

Al no existir ningún menor de orden 2 distinto de cero se tiene que rg $A \leq 1$ y al no ser A la matriz nula, rg $A = 1$.

c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

El menor de orden 2 considerando F_1F_2 y C_1C_2 es $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 2 = 5 \neq 0$.

Al ser distinto de cero lo orlamos con F_3 y C_3: $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 20 + 12 + 8 + 2 - 45 = 0$

Como este menor es nulo y no existen más menores de orden 3, se tiene rg $A = 2$.

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 5 & -1 & 3 \\ 13 & -11 & 19 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Como A es una matriz de orden 4×3, no existen menores de orden 4 y, por tanto, rg $A \leq 3$.

El menor de orden 2 considerando F_1F_2 y C_1C_2 es $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 20 = -21 \neq 0$

Al ser este menor de orden 2 distinto de cero, buscamos un menor de orden 3 no nulo.

Orlando con F_3 y C_3: $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 5 & -1 & 3 \\ 13 & -11 & 19 \end{vmatrix} = -19 + 156 + 275 - 65 - 380 + 33 = 0$

Al ser igual a cero volvemos a orlar el menor de orden 2 no nulo, esta vez, con F_4 y C_3:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 5 & -1 & 3 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 60 + 25 - 25 - 40 + 3 = 21 \neq 0$$

Por tanto, rg A = 3.

8. Calcular, mediante menores, el rango de las siguientes matrices según los valores del parámetro real a. **a)** $A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ **b)** $A = \begin{pmatrix} a & 3 & 1 \\ 3 & a & -1 \end{pmatrix}$ **c)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ a & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Solución

a) Para saber si rango de $A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ es 1 o 2 es necesario calcular los valores del parámetro *a* para los que el determinante de A (único menor de orden 2 que existe) es nulo.

$\begin{vmatrix} a & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -a - 6 = 0 \Rightarrow a = -6$

Si $a = -6$ entonces $|A| = 0$ y por tanto rg $A < 2$, es decir, rg $A = 1$.
Si $a \neq -6$ entonces $|A| \neq 0$ y por tanto rg $A = 2$.

b) Elegimos en la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 3 & 1 \\ 3 & a & -1 \end{pmatrix}$ un menor de orden 1 no nulo, por ejemplo el formado por F_2 y C_1 : $|3| = 3 \neq 0$.

Lo orlamos con F_1 y C_2 : $\begin{vmatrix} a & 3 \\ 3 & a \end{vmatrix} = a^2 - 9 = 0 \Rightarrow a = 3, -3$.

- Si $a \neq 3$ y $a \neq -3$, entonces rg $A = 2$, ya que existe un menor de orden 2 no nulo.
- Si $a = 3$ o $a = -3$, seguimos buscando un menor de orden 2 no nulo, para ello, orlamos el menor de orden 1 no nulo con F_1 y C_3 (únicas fila y columna restantes):

$\begin{vmatrix} a & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -a - 3$

En consecuencia: Si $a = 3$, este último menor es $-6 \neq 0$ y, por tanto, rg $A = 2$.
Si $a = -3$, este último menor es cero y, por tanto, rg $A = 1$.

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ a & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

En los casos en los que la matriz es cuadrada es conveniente calcular el determinante para saber si el rango coincide o no con el orden de la matriz, es decir, para saber si el rango es el máximo posible.

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ a & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 16 + 2a - 2 - 12a - 8 = -10a + 12$

La ecuación $|A| = -10a + 12 = 0$, tiene por solución $a = \frac{6}{5}$, por tanto:

- Si $a \neq \frac{6}{5}$ se tiene rg $A = 3$.

• Si $a = \frac{6}{5}$ entonces rg $A < 3$. Como en la matriz A existen menores de orden 2 no nulos, por ejemplo, considerando F_1F_2 y C_2C_3, $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 16 - 2 = 14 \neq 0$, se tiene que rg $A = 2$.