8. Calcular, mediante menores, el rango de las siguientes matrices según los valores del parámetro real a. **a)** $A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ **b)** $A = \begin{pmatrix} a & 3 & 1 \\ 3 & a & -1 \end{pmatrix}$ **c)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ a & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Solución

a) Para saber si rango de $A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ es 1 o 2 es necesario calcular los valores del parámetro a para los que el determinante de A (único menor de orden 2 que existe) es nulo.

$\begin{vmatrix} a & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -a - 6 = 0 \Rightarrow a = -6$

Si $a = -6$ entonces $|A| = 0$ y por tanto rg $A < 2$, es decir, rg $A = 1$.
Si $a \neq -6$ entonces $|A| \neq 0$ y por tanto rg $A = 2$.

b) Elegimos en la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 3 & 1 \\ 3 & a & -1 \end{pmatrix}$ un menor de orden 1 no nulo, por ejemplo el formado por F_2 y C_1 : $|3| = 3 \neq 0$.

Lo orlamos con F_1 y C_2 : $\begin{vmatrix} a & 3 \\ 3 & a \end{vmatrix} = a^2 - 9 = 0 \Rightarrow a = 3, -3$.

- Si $a \neq 3$ y $a \neq -3$, entonces rg $A = 2$, ya que existe un menor de orden 2 no nulo.
- Si $a = 3$ o $a = -3$, seguimos buscando un menor de orden 2 no nulo, para ello, orlamos el menor de orden 1 no nulo con F_1 y C_3 (únicas fila y columna restantes):

$\begin{vmatrix} a & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -a - 3$

En consecuencia: Si $a = 3$, este último menor es $-6 \neq 0$ y, por tanto, rg $A = 2$.
Si $a = -3$, este último menor es cero y, por tanto, rg $A = 1$.

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ a & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

En los casos en los que la matriz es cuadrada es conveniente calcular el determinante para saber si el rango coincide o no con el orden de la matriz, es decir, para saber si el rango es el máximo posible.

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ a & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 16 + 2a - 2 - 12a - 8 = -10a + 12$

La ecuación $|A| = -10a + 12 = 0$, tiene por solución $a = \frac{6}{5}$, por tanto:

- Si $a \neq \frac{6}{5}$ se tiene rg $A = 3$.
- Si $a = \frac{6}{5}$ entonces rg $A < 3$. Como en la matriz A existen menores de orden 2 no nulos, por ejemplo, considerando F_1F_2 y C_2C_3, $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 16 - 2 = 14 \neq 0$, se tiene que rg $A = 2$.