7. Calcular, mediante menores, el rango de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -4 & 10 \end{pmatrix}$ **b)** $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 6 & 10 & -2 \end{pmatrix}$ **c)** $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ **d)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 5 & -1 & 3 \\ 13 & -11 & 19 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Solución

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -4 & 10 \end{pmatrix}$

El menor de orden 1 considerando F_1 y C_1 es $|2| \neq 0$, por tanto, rg $A \geq 1$.

Orlando el anterior menor con F_2 y C_2 se tiene $\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -4 & 10 \end{vmatrix} = 20 - 20 = 0$, por tanto, y al no haber más menores de orden 2, se concluye que rg $A = 1$.

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 6 & 10 & -2 \end{pmatrix}$

Buscamos un menor de orden 2 no nulo.

Considerando F_1F_2 y C_1C_2, $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 10 \end{vmatrix} = 30 – 30 = 0$.

Considerando F_1F_2 y C_1C_3, $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = -6 + 6 = 0$.

Considerando F_1F_2 y C_2C_3, $\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 10 & -2 \end{vmatrix} = -10 + 10 = 0$.

Al no existir ningún menor de orden 2 distinto de cero se tiene que rg $A \leq 1$ y al no ser A la matriz nula, rg $A = 1$.

c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

El menor de orden 2 considerando F_1F_2 y C_1C_2 es $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 2 = 5 \neq 0$.

Al ser distinto de cero lo orlamos con F_3 y C_3: $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 20 + 12 + 8 + 2 - 45 = 0$

Como este menor es nulo y no existen más menores de orden 3, se tiene rg $A = 2$.

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 5 & -1 & 3 \\ 13 & -11 & 19 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Como A es una matriz de orden 4×3, no existen menores de orden 4 y, por tanto, rg $A \leq 3$.

El menor de orden 2 considerando F_1F_2 y C_1C_2 es $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 20 = -21 \neq 0$

Al ser este menor de orden 2 distinto de cero, buscamos un menor de orden 3 no nulo.

Orlando con F_3 y C_3: $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 5 & -1 & 3 \\ 13 & -11 & 19 \end{vmatrix} = -19 + 156 + 275 - 65 - 380 + 33 = 0$

Al ser igual a cero volvemos a orlar el menor de orden 2 no nulo, esta vez, con F_4 y C_3:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 5 & -1 & 3 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 60 + 25 - 25 - 40 + 3 = 21 \neq 0$$

Por tanto, rg $A = 3$.