6. Mediante adjuntos, calcular la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & a & a \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, para aquellos valores del parámetro real a que sea posible.

Solución

Calculamos el determinante de A para hallar los valores del parámetro a que hacen que la matriz sea regular.

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & a & a \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3a + 4a - 2a = 5a$, si el determinante es cero, la matriz no será regular

Como la ecuación $5a = 0$ tiene por solución $a = 0$, esta matriz tiene matriz inversa para valores de a distintos de 0. Para estos valores de a, los adjuntos son:

$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a & a \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3a$ $A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & a \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(-2a) = 2a$

$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & a \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2a$ $A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -6$

$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1$ $A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -(-4) = 4$

$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ a & a \end{vmatrix} = 2a - a = a$ $A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{vmatrix} = -a$

$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & a \end{vmatrix} = a$

Por tanto, $\mathrm{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 3a & 2a & -2a \\ -6 & 1 & 4 \\ a & -a & a \end{pmatrix}$ y $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\ (\mathrm{Adj}(A))^t = \dfrac{1}{5a}\begin{pmatrix} 3a & -6 & a \\ 2a & 1 & -a \\ -2a & 4 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-6}{5a} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5a} & \frac{-1}{5} \\ \frac{-2}{5} & \frac{4}{5a} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$