5. Decir si las siguientes matrices son regulares y en caso afirmativo calcular su inversa mediante adjuntos.

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ **b)** $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 6 & -3 & 0 \\ -2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ **c)** $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Solución

a) Al ser una matriz 2 3 no es cuadrada y, por lo tanto no tiene inversa

b) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 6 & -3 & 0 \\ -2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0 + 54 + 0 - 18 + 0 - 36 - 0 = 0$

Al ser el determinante igual a cero la matriz no tiene inversa.

c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 + 6 - 1 - 0 + 2 + 2 = 9 \neq 0$

Al ser el determinante distinto de cero la matriz tiene inversa. Para calcular A^{-1}, en primer lugar hallaremos los adjuntos de todos los elementos.

$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1$ $A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = -(-2 - 6) = 8$

$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} = 1$ $A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -(2 - 1) = -1$

$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 6 = 10$ $A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} = -(-2 - 6) = 8$

$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ $A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -(2 - 1) = -1$

$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$

La matriz adjunta de A es $\mathrm{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 1 \\ -1 & 10 & 8 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz inversa de A es

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,(\mathrm{Adj}(A))^t = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 8 & 10 & -1 \\ 1 & 8 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{-1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{10}{9} & \frac{-1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{8}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$