CÁLCULO DEL RANGO DE UNA MATRIZ

El concepto de determinante permite obtener un nuevo método para el cálculo del rango de una matriz, además del ya expuestos en el apartado anterior de Matrices.
Como resultados previos para este cálculo es necesario conocer los siguientes conceptos:

- Menor de orden *p* de una matriz *A* es el determinante de una matriz que se obtiene considerando únicamente *p* filas y *p* columnas de *A*.

- **Orlar un menor de orden *p*** de una matriz *A* es considerar un menor de orden $p+1$ obtenido al agregarle, a dicho menor de orden *p*, otra fila y otra columna de la matriz *A*.

Además, se verifica que si M es una matriz cuadrada de orden *p* entonces:

$$\mathbf{rg}\ M = p \iff |M| \neq 0$$
$$\mathbf{rg}\ M < p \iff |M| = 0$$

Teniendo en cuenta lo anterior, se puede calcular el rango de cualquier matriz *A* de orden $m \times n$ mediante los pasos del siguiente procedimiento:

1) Se busca un menor de orden 1 no nulo,
   - si no existe entonces rg $A = 0$ y se termina el procedimiento.
   - si existe entonces rg $A \geq 1$, y se continúa en el paso siguiente.
2) Se calculan los menores de orden 2 que se obtienen orlando el menor de orden 1 no nulo,
   - si no existen o son todos cero entonces rg $A = 1$ y se termina el procedimiento.
   - si existe alguno distinto de cero entonces rg $A \geq 2$, y se continúa en el paso siguiente.
3) Se calculan los menores de orden 3 que se obtienen orlando el menor de orden 2 no nulo,
   - si no existen o son todos cero entonces rg $A = 2$ y se termina el procedimiento.
   - si existe alguno distinto de cero entonces rg $A \geq 3$, y se continúa en el paso siguiente.
4) Se repite el proceso como en los pasos anteriores, orlando el menor no nulo obtenido.

Este procedimiento finaliza cuando se obtiene un menor de orden *r* no nulo y los menores de orden $r+1$ obtenidos al orlar dicho menor o bien no existen o son cero. En este caso se tiene rg $A = r$.

Observar que: rg $A \leq$ nº de filas de *A* y rg $A \leq$ nº de columnas de *A*.

Ejemplo: Vamos a calcular el rango de $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & -6 \\ 2 & 4 & 4 & -6 \end{pmatrix}$ siguiendo los pasos del procedimiento anterior.

1º) El menor de orden 1 formado por la primera fila y primera columna es $|2| = 2 \neq 0$, por tanto rg $A \geq 1$. Veamos qué ocurre con los de orden 2 que se obtienen al orlar este menor.

2º) Se orla con la 2ª fila y 2ª columna de *A*, obteniéndose $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$, por tanto rg $A \geq 2$. Veamos qué ocurre con los de orden 3 que se obtienen al orlar este menor.

3º) Se orla con la 3ª fila y 3ª columna de *A*, obteniéndose $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 32 - 24 + 16 - 24 = 48 - 48 = 0$. Al ser nulo se orla el menor de orden 2 con la 3ª fila y 4ª columna de *A*, obteniéndose $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -6 \\ 2 & 4 & -6 \end{vmatrix} = -48 + 48 = 0$. Al ser nulo y haber considerado todas las filas y columnas de A se tiene que rg $A = 2$.