CÁLCULO DE LA MATRIZ INVERSA

El concepto de determinante permite obtener un nuevo método para el cálculo de la matriz inversa, además del ya expuesto en el apartado anterior de Matrices.

En primer lugar, señalar que este concepto, permite dar la siguiente caracterización de matrices regulares: $\boldsymbol{A}$ **es regular** $\Leftrightarrow |\boldsymbol{A}| \neq \mathbf{0}$

Se llama **matriz adjunta** de A a la matriz cuyo elemento ij es el adjunto del elemento a_{ij} de la matriz A y se representa, Adj(A). Es decir, Adj(A) = (A_{ij}).

Se puede demostrar que la **matriz inversa** de una matriz regular A es $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,(\mathrm{Adj}(A))^t}$

Ejemplo: Cálculo de la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

En primer lugar calculamos su determinante para comprobar si es regular

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 2 + 12 = 10$$

Ahora calculamos los adjuntos de todos los elementos

$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2 - 6 = -4$ $\quad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -(-6) = 6$ $\quad A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2$

$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -(-2) = 2$ $\quad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 2 = 2$ $\quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -(-4) = 4$

$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 1$ $\quad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -(-6) = 6$ $\quad A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2$

Por tanto, $\mathrm{Adj}(A) = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ y $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,(\mathrm{Adj}(A))^t = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$