Autoras: Gloria Jarne, Esperanza Minguillón, Trinidad Zabal

CÁLCULO

A cualquier matriz cuadrada A se le puede asociar un número real, que se denomina **determinante** de A. Este número se suele simbolizar $|A|$ o det(A) y se calcula como se explica a continuación.

- Determinante de **orden 1**: $|A| = |a_{11}| = a_{11}$

  Ejemplo: $|3| = 3$, $|-3| = -3$ (No confundir el determinante de orden uno con el valor absoluto o módulo de un número real)

- Determinante de **orden 2**: $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}$

  Ejemplo: $\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 4.8 - (-1)5 = 32 + 5 = 37$

- Determinante de **orden 3** (Regla de Sarrus):

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} - a_{13}\,a_{22}\,a_{31} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32}$$

  Ejemplo: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 6 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 1(-5)(-2) + 2.6.4 + 3.0(-1) - 3(-5)4 - 2.0(-2) - 1.6(-1) = 10 + 48 + 0 + 60 - 0 + 6 = 124$

- Determinante de **orden *n***:

  Como resultados previos para este cálculo es necesario conocer los conceptos de menor complementario y de adjunto del elemento a de una matriz cuadrada A.

  \- **Menor complementario** del elemento a_{ij} de una matriz A es el determinante de la matriz que se obtiene al quitar la fila i y la columna j de la matriz A.

  \- **Adjunto** del elemento a de una matriz A es el producto de $(-1)^{i+j}$ por el menor complementario del elemento a. Se simboliza A_{ij}.

  Ejemplo: Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

  a) El menor complementario del elemento a_{23} de A es, $\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = (-2).2 - 0.2 = -4$, este determinante es el de la submatriz de A obtenida al quitarle la segunda fila y la tercera columna.

  b) El adjunto del elemento a_{23} de A es: $A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -(-4) = 4$

  El **determinante de una matriz cuadrada *A* de orden *n*** se calcula efectuando la suma de los productos de los elementos de una fila o columna por sus respectivos adjuntos, es decir:.

$$|A| = a_{i1}\,A_{i1} + a_{i2}\,A_{i2} + \ldots + a_{in}\,A_{in} \quad \text{(desarrollo por la fila } i\text{)}$$

$$|A| = a_{1j}\,A_{1j} + a_{2j}\,A_{2j} + \ldots + a_{nj}\,A_{nj} \quad \text{(desarrollo por la columna } j\text{)}$$

  Ejemplo: Para calcular $|A| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & 2 \\ -4 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, en primer lugar elegimos una fila o columna para desarrollar el determinante, por ejemplo la segunda fila.

  Así, $|A| = 0.\,A_{21} + 1.\,A_{22} + (-1)\,A_{23} + 3.\,A_{24} = A_{22} - A_{23} + 3.\,A_{24}$

A continuación calculamos los adjuntos necesarios, mediante la Regla de Sarrus.

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ -4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -30 + 0 + 4 + 20 - 0 + 8 = 2$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -(-6 - 8 + 4 + 4 - 6 + 8) = 4$$

$$A_{24} = (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \\ -4 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -4 - 20 + 0 - 0 - 4 + 20 = -8$$

En consecuencia $|A| = 2 - 4 + 3(-8) = -26$

Ejemplo: Para calcular $|A| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & 2 \\ -4 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, elegimos una fila o columna, por ejemplo la segunda fila, para efectuar el desarrollo. Previamente, vamos a hacer que sean cero los dos últimos elementos de dicha fila, aplicando algunas propiedades de los determinantes.

Así, $|A| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & 2 \\ -4 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} \underset{=}{C_3 \to C_3 + C_2} \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 6 & 2 \\ -4 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} \underset{=}{C_4 \to C_4 - 3C_2} \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 6 & -1 \\ -4 & 2 & 4 & -3 \end{vmatrix} =$

$$= 0.\, A_{21} + 1.\, A_{22} + 0.\, A_{23} + 0.\, A_{24} = A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 2 & 6 & -1 \\ -4 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 36 + 4 - 16 - 48 + 6 - 8 = -26$$

PROPIEDADES

1. Si en una matriz se intercambian entre sí dos filas (columnas) el determinante cambia de signo.

2. Si en una matriz se multiplica una fila (columna) por un número real, el determinante de la matriz resultante es igual al determinante de la matriz inicial multiplicado por dicho número.

3. Si en una matriz se suma a una fila (columna) el producto de otra fila (columna) por un número real, el determinante no varía.

4. El determinante de una matriz con una fila (columna) cuyos elementos son ceros es nulo.

5. El determinante de una matriz con dos filas (columnas) iguales es nulo.

6. El determinante de una matriz con dos filas (columnas) proporcionales es nulo.

7. Si A y B son matrices cuadradas del mismo orden entonces $|AB| = |A|.|B|$

8. $|A^t| = |A|$

9. Si A es una matriz cuadrada de orden n y t es un número real entonces $|tA| = t^n|A|$

10. Si A es una matriz regular entonces $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$

11. El determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

El cálculo de determinantes se simplifica utilizando algunas de las propiedades anteriores, con el objeto de obtener el máximo número de ceros en la fila (columna) elegida para desarrollar el determinante.

Ejemplo 6: Para calcular $|A| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & 2 \\ -4 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, elegimos una fila o columna, por ejemplo la segunda fila, para efectuar el desarrollo. Previamente, vamos a hacer que sean cero los dos últimos elementos de dicha fila, aplicando algunas propiedades de los determinantes.

Así, $|A| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & 2 \\ -4 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} \underset{=}{C_3 \to C_3 + C_2} \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 6 & 2 \\ -4 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} \underset{=}{C_4 \to C_4 - 3C_2} \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 6 & -1 \\ -4 & 2 & 4 & -3 \end{vmatrix} =$

$$= 0.\,A_{21} + 1.\,A_{22} + 0.\,A_{23} + 0.\,A_{24} = A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 2 & 6 & -1 \\ -4 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 36 + 4 - 16 - 48 + 6 - 8 = -26$$