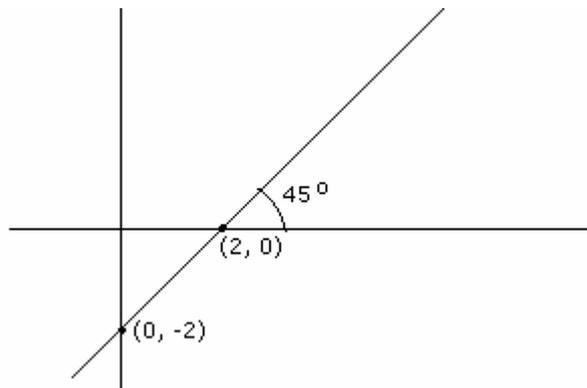


## RECTAS EN EL PLANO

### INCLINACIÓN Y PENDIENTE DE UNA RECTA

La **inclinación** de una recta es el ángulo que forma el eje  $OX$  positivo con dicha recta y su **pendiente** es la tangente trigonométrica de su inclinación.

Ejemplo 1: La recta que pasa por los puntos  $(0, -2)$  y  $(2, 0)$  está representada en la siguiente figura. La inclinación de esta recta es igual a  $45^\circ$  y su pendiente es  $\text{tg}45^\circ = 1$ .



### ECUACIONES DE UNA RECTA EN EL PLANO

#### Ecuación vectorial

La **ecuación vectorial** de la recta que pasa por el punto  $A$  y tiene la dirección del vector  $\vec{v}$  es  $\vec{OX} = \vec{OA} + t \cdot \vec{v}$  con  $t \in \mathbb{R}$  y  $X$  un punto genérico de la recta. Al vector  $\vec{v}$  se le llama **vector direccional** de la recta.

Ejemplo 2: La ecuación vectorial de la recta que pasa por  $A = (3, -2)$  y tiene como vector direccional  $\vec{v} = (1, 4)$  es  $(x, y) = (3, -2) + t \cdot (1, 4)$

#### Ecuación general

La **ecuación general** de una recta en el plano es  $ax + by = c$  siendo  $a, b, c$  números reales y las variables  $x$  e  $y$  las coordenadas de un punto cualquiera de la recta.

Así, un punto  $(x, y)$  del plano pertenece a la recta si verifica la ecuación.

Ejemplo 3: Para comprobar si los puntos  $A = (0, -4)$ ,  $B = (2, 1)$  y  $C = (2, -1)$  pertenecen a la recta  $3x - 2y = 8$ , sustituimos las coordenadas de cada punto en la ecuación.

- \* Punto  $A$ :  $3 \cdot 0 - 2 \cdot (-4) = 8$ , por tanto,  $A$  pertenece a la recta.
- \* Punto  $B$ :  $3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 6 - 2 = 4 \neq 8$ , por tanto,  $B$  no pertenece a la recta.
- \* Punto  $C$ :  $3 \cdot 2 - 2 \cdot (-1) = 6 + 2 = 8$ , por tanto,  $C$  pertenece a la recta.

#### Otras ecuaciones de una recta

Una recta viene determinada por "un punto y un vector direccional", por "dos puntos distintos" o por "un punto y la pendiente". Veamos a continuación como, a partir de estas distintas formas de determinación, se puede escribir su ecuación.

- *Ecuación de la recta que pasa por el punto  $(x_0, y_0)$  y es paralela al vector no nulo  $(a, b)$*

- Si  $a$  y  $b$  son números reales no nulos la ecuación es  $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}$

- Si  $a = 0$  la ecuación de la recta es  $x = x_0$ , ya que es una recta en la dirección del vector  $(0, b)$ , es decir, vertical.

- Si  $b = 0$  la ecuación de la recta es  $y = y_0$ , ya que es una recta en la dirección del vector  $(a, 0)$ , es decir, horizontal.

Ejemplo 4: La ecuación de la recta que pasa por el punto  $(4, -2)$  y es paralela al vector  $(1, 5)$  es  $\frac{x-4}{1} = \frac{y+2}{5}$

- *Ecuación de la recta que pasa por dos puntos distintos  $(x_0, y_0)$  y  $(x_1, y_1)$*

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$$

Nótese que si algún denominador es cero la ecuación de la recta se obtiene igualando el numerador correspondiente a cero, por la misma causa que en el apartado anterior.

Ejemplo 5:

a) La ecuación de la recta que pasa por los puntos  $(4, -2)$  y  $(-1, 3)$  es  $\frac{x-4}{-1-4} = \frac{y+2}{3+2}$

b) La ecuación de la recta que pasa por los puntos  $(0, -2)$  y  $(6, -2)$  viene dada por  $\frac{x-0}{6-0} = \frac{y+2}{-2+2}$ , pero al ser cero el denominador de la segunda fracción, la ecuación de la recta es  $y + 2 = 0$ , es decir,  $y = -2$ .

- *Ecuación de la recta que pasa por el punto  $(x_0, y_0)$  y tiene por pendiente  $m$*

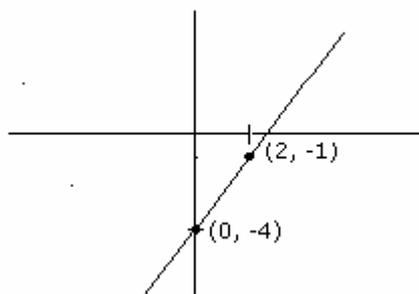
$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Ejemplo 6: La ecuación de la recta que pasa por el punto  $(1, -4)$  y tiene por pendiente 2 es  $y + 4 = 2(x - 1)$

En ocasiones es interesante considerar la ecuación de una recta como una función, para ello se considera la **ecuación explícita**, con la variable  $y$  despejada, que tiene la forma  $y = mx + b$ , donde  $m$  es la pendiente y  $b$  la ordenada para  $x = 0$ . Esta ecuación explícita no existe para rectas verticales, es decir, para rectas cuya ecuación general es de la forma  $x = k$ , con  $k$  un número real. Nótese que estas rectas tienen la inclinación igual a  $90^\circ$  y la pendiente es infinito (o no existe).

Para representar gráficamente una recta, lo más sencillo es obtener dos puntos que pertenezcan a ella.

Ejemplo 7: Dada la recta  $3x - 2y = 8$  los puntos que se obtienen para  $x = 0$  y  $x = 2$  son  $(0, -4)$  y  $(2, -1)$ , por tanto, su gráfica es



## INCIDENCIA Y PARALELISMO DE RECTAS

Dos rectas son **paralelas** si tienen la misma pendiente o sus vectores direccionales tienen la misma dirección (sus componentes son proporcionales). Una forma de determinar si dos rectas son paralelas es comprobar que el sistema formado por las ecuaciones de ambas rectas no tiene solución o bien tiene infinitas.

Obviamente negando las condiciones del párrafo anterior, se tiene que si dos rectas no tienen la misma pendiente o sus vectores directores no tienen la misma dirección podemos asegurar que se cortan en un punto. Las coordenadas del punto de corte se obtienen resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de ambas rectas.

Ejemplo 8:

- a) Las rectas  $y = 3x - 8$  e  $y = 3x + 2$  son paralelas ya que ambas tienen la misma pendiente  $m = 3$ .
- b) Las rectas  $\frac{x-4}{-4} = \frac{y+2}{3}$  y  $\frac{x+4}{4} = \frac{y+1}{-3}$  son paralelas ya que sus vectores direccionales  $(-4, 3)$  y  $(4, -3)$  son proporcionales y por ello tienen la misma dirección.
- c) Las rectas  $2x + y = 5$  y  $4x + 2y = -3$  son paralelas ya que al resolver el sistema formado por las dos ecuaciones no se obtiene ninguna solución.
- d) Las rectas  $2x - y = 5$  y  $-4x + 2y = -10$  son paralelas ya que al resolver el sistema formado por las dos ecuaciones se obtienen infinitas soluciones.
- e) Las rectas  $y = x - 8$  e  $y = 3x + 2$  no son paralelas ya que sus pendientes  $m_1 = 1$  y  $m_2 = 3$  son distintas.
- f) Las rectas  $\frac{x-4}{-4} = \frac{y+2}{3}$  y  $\frac{x+4}{4} = \frac{y+1}{6}$  no son paralelas ya que tienen vectores direccionales  $(-4, 3)$  y  $(4, 6)$  tienen distinta dirección.
- g) Las rectas  $2x + y = 0$  y  $4x + y = 2$  no son paralelas ya que al resolver el sistema formado por las dos ecuaciones se obtiene como solución  $x = 1, y = -2$ . Luego el punto de corte de las dos rectas es  $(1, -2)$ .