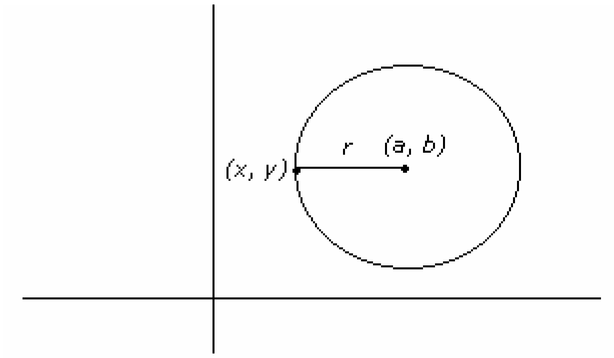
CÓNICAS

CIRCUNFERENCIA

La **circunferencia de centro *C* y radio *r*** ≥ 0, es el conjunto de puntos del plano cuya distancia al punto C es igual a r.

Para obtener su ecuación se tiene en cuenta que un punto $X = (x, y)$ pertenecerá a la circunferencia de centro $C = (a, b)$ y radio r si $d(X, C) = r$, es decir, si $\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r$. Elevando al cuadrado se obtiene $\boxed{(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2}$



Una circunferencia puede venir dada por una ecuación de la forma $x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$. Para determinar su centro y su radio se forman cuadrados en dicha ecuación obteniéndose $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

Ejemplo 1:

a) La ecuación de la circunferencia de centro (-2, 6) y radio 4 es $(x + 2)^2 + (y - 6)^2 = 16$, que desarrollando los cuadrados y realizando operaciones da lugar a la ecuación $x^2 + y^2 + 4x - 12y + 24 = 0$

b) El centro y el radio de la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 7 = 0$ se pueden calcular formando cuadrados perfectos en el primer miembro de la igualdad

$$x^2 + y^2 + 2x - 8y + 7 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 2x) + (y^2 - 8y) + 7 = 0 \Leftrightarrow ((x + 1)^2 - 1) + ((y - 4)^2 - 16) + 7 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 10$$

De donde se deduce que el centro de la circunferencia es el punto (-1, 4) y que el radio mide $\sqrt{10}$

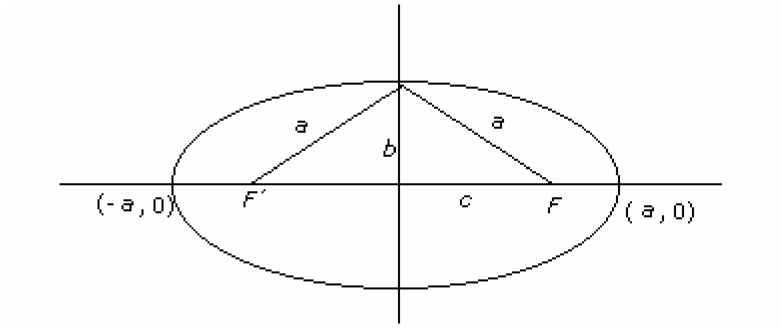
ELIPSE

Una **elipse de focos *F* y *F´***, puntos fijos del plano, es el conjunto de puntos cuya suma de distancias a los focos es igual a una constante.

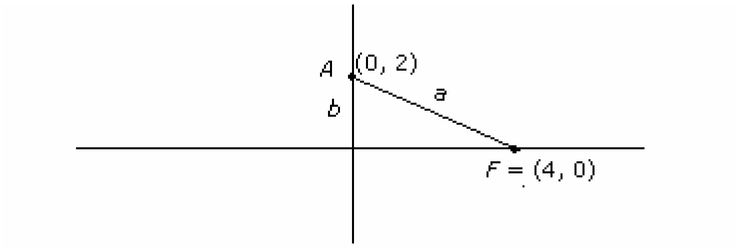
Si se colocan los focos en puntos del eje OX simétricos respecto del origen, $F = (c, 0)$ y $F' = (-c, 0)$, y se representa por $2a$ la suma de las distancias a los focos se obtiene la *ecuación reducida* de la elipse procediendo como sigue:

El punto $X = (x, y)$ del plano pertenecerá a la elipse si verifica $d(X, F) + d(X, F') = 2a$, es decir, si $\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a$.

Realizando operaciones, se obtiene $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$ y denotando $a^2 - c^2 = b^2$ la ecuación reducida de la elipse se escribe $\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$



Ejemplo 2: Escribir la ecuación de la elipse de focos F = (4, 0) y $F´$ = (-4, 0), que pasa por el punto A = (0, 2).



Para determinar la ecuación de la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, como en este ejemplo se conoce el punto de corte de la elipse con el eje de ordenadas, se sabe que b=2 y se puede calcular a = $d(A, F)$ = $\sqrt{4^2+2^2}$ = $\sqrt{16+4}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$.

Por tanto, la ecuación es $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{4}=1$

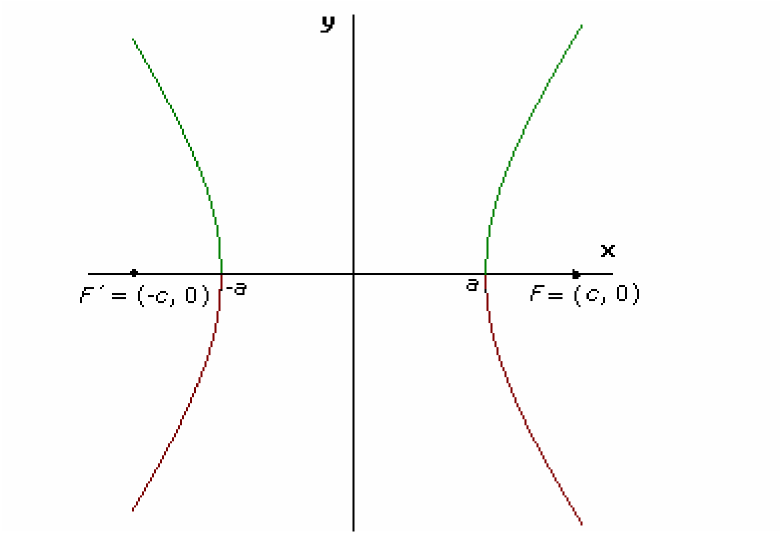
HIPÉRBOLA

Una **hipérbola de focos *F* y *F´***, puntos fijos del plano, es el conjunto de puntos cuya diferencia de distancias a los focos es igual a una constante.

Si la constante se representa por 2*a* y los focos se colocan en puntos del eje *OX* simétricos respecto del origen, F = (c, 0) y $F´$ = (-c, 0), se obtiene la *ecuación reducida* de la hipérbola procediendo como sigue:

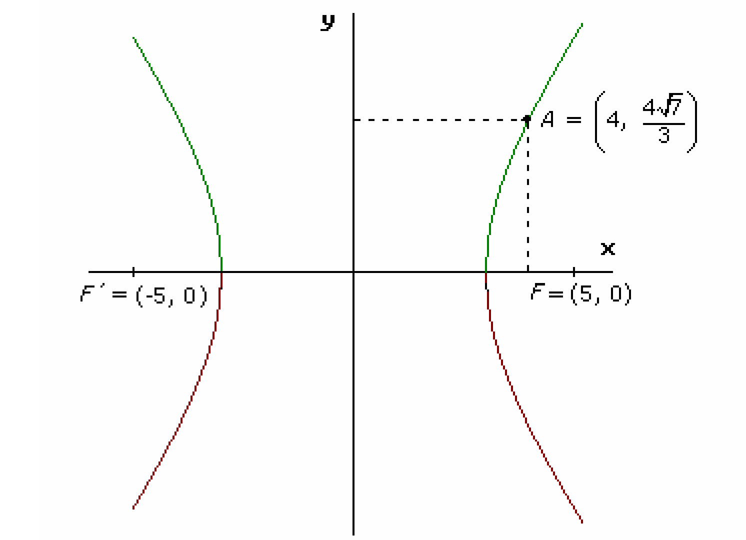
El punto X = (x, y) del plano pertenecerá a la hipérbola si verifica $d(X, F) - d(X, F´) = 2a$, es decir, si $\sqrt{(x - c)^2 + y^2} - \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a$.

Realizando operaciones, se obtiene $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2}=1$ y denotando $c^2-a^2 = b^2$ la ecuación de la hipérbola se escribe $\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$



Ejemplo 3:

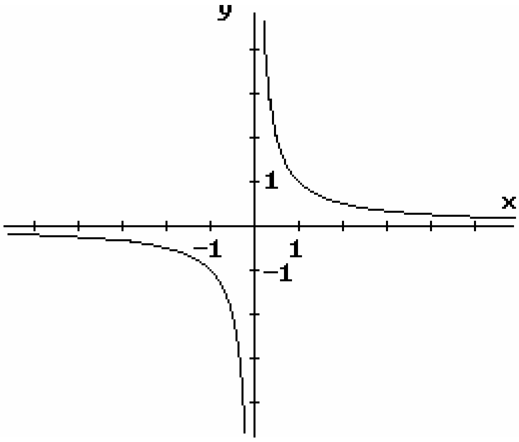
Escribir la ecuación de la hipérbola de focos F = (5, 0) y $F´$ = (-5, 0), que pasa por el punto $A = \left(4, \frac{4\sqrt{7}}{3}\right)$.



Considerando la ecuación de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$, en este ejemplo se conoce c = 5 y se puede calcular a, ya que $2a$ = $d(A, F´)$ - $d(A, F)$ $= \sqrt{(4+5)^2 + \left(\frac{4\sqrt{7}}{3}\right)^2} - \sqrt{(4-5)^2 + \left(\frac{4\sqrt{7}}{3}\right)^2} = \sqrt{81 + \frac{112}{9}} - \sqrt{1 + \frac{112}{9}} = \sqrt{\frac{841}{9}} - \sqrt{\frac{121}{9}} = \frac{29}{3} - \frac{11}{3} =$ $= \frac{18}{3} = 6$. De ahí que a = 3, y por tanto la ecuación de la hipérbola es $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25-9} = 1$, es decir, $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.

De las hipérbolas cuyos focos no están en el eje OX o no son simétricos respecto al origen merece la pena señalar aquellas cuya ecuación es de la forma $x.y = k$. Teniendo en cuenta el signo de k, se deduce que para $k<0$ la hipérbola está en el segundo y cuarto cuadrante, para $k>0$ la hipérbola está en el primer y tercer cuadrante y para $k=0$ la hipérbola viene representada por los ejes de coordenadas y se denomina hipérbola degenerada.

Ejemplo 4: La representación de la hipérbola de ecuación $x.y = 1$ es:

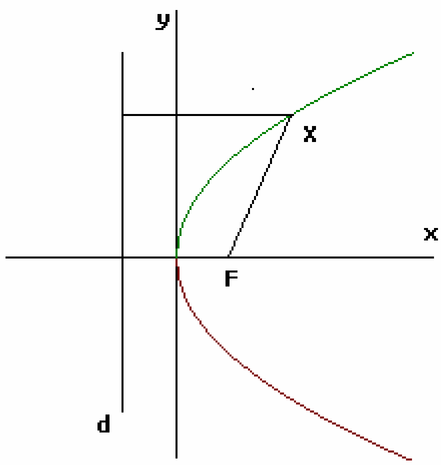


PARÁBOLA

Una **parábola** es el conjunto de puntos que equidistan de un punto *F*, llamado **foco**, y de una recta *d*, llamada **directriz**.

Para obtener la *ecuación reducida* de la parábola, se considera como foco el punto $F = (\frac{p}{2}, 0)$ y como directriz la recta vertical $x = -\frac{p}{2}$

El punto $X = (x, y)$ del plano pertenecerá a la parábola si verifica $d(X, F) = d(X, \text{recta directriz})$, es decir, si $\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}$. Realizando operaciones, se obtiene $\boxed{y^2 = 2px}$



Se llama **eje** de una parábola a su eje de simetría y **vértice** al punto de la parábola que pertenece al eje.

El eje de la parábola $y^2 = 2px$ es el eje de abscisas o eje *OX* y el vértice es el origen de coordenadas.

Ejemplo 5: Escribir la ecuación de la parábola que tiene por foco el punto (5, 0) y vértice en el origen.

Al estar el vértice en el origen y el foco en el eje de abscisas la ecuación de la hipérbola es $y^2 = 2px$ con $\frac{p}{2} = 5$, es decir $p =$

10. Así, la ecuación es $y^2 = 20x$.

A continuación se ven algunas parábolas que vienen definidas por polinomios de segundo grado:

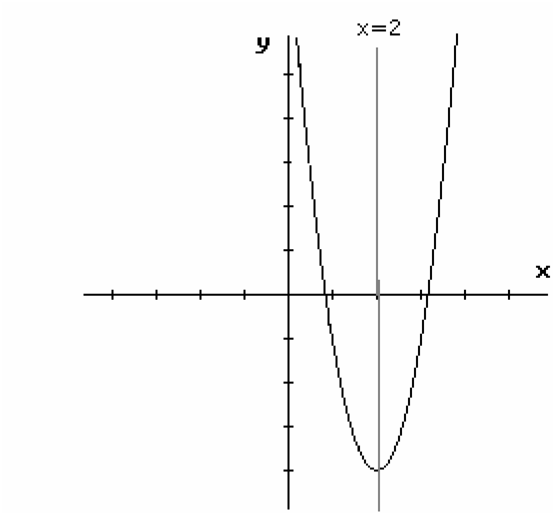
• *Parábolas de eje vertical*

El conjunto de puntos (x, y) del plano relacionados mediante un polinomio de segundo grado de la forma $y = ax^2 + bx + c$ es una parábola de eje vertical y viceversa.

La parábola $y = ax^2 + bx + c$ tiene por eje la recta vertical $x = -\frac{b}{2a}$, y el vértice es el punto de intersección de la parábola y su eje.

Notar que si $a > 0$ las ramas de la parábola van hacia arriba y que si $a < 0$ las ramas de la parábola van hacia abajo.

Ejemplo 6: La parábola $y = 3x^2 - 12x + 18$ tiene por eje la recta $x = -\frac{-12}{2.3} = 2$ y por vértice el punto (2, 6)

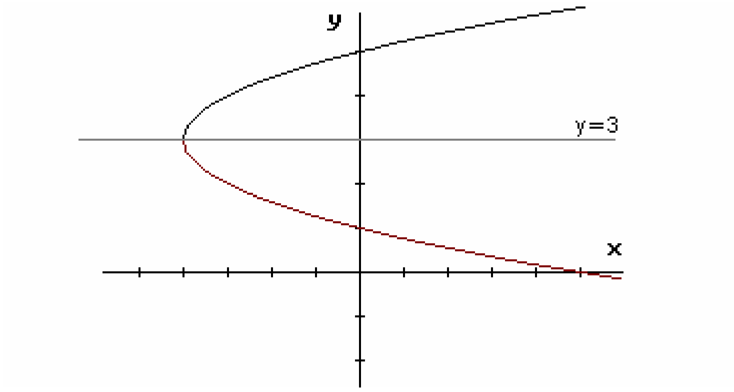


• *Parábolas de eje horizontal*

El conjunto de puntos (x, y) del plano relacionados mediante un polinomio de segundo grado de la forma $x = ay^2 + by + c$ es una parábola de eje horizontal y viceversa.

La parábola $x = ay^2 + by + c$ tiene por eje la recta horizontal $y = -\frac{b}{2a}$, y el vértice es el punto de intersección de la parábola y su eje.

Ejemplo 7: La parábola $x = y^2 - 6y + 5$ tiene por eje la recta $y = -\frac{-6}{2} = 3$ y por vértice el punto (-4, 3)


y
y=3
x