9. Clasificar las cónicas que tienen las siguientes ecuaciones:
a) $x^2+y^2+2x+6y+1=0$
b) $2x^2+2y^2-4x+4y+19=0$
c) $x^2 + 4y^2 = 100$
d) $8x^2 - 3y^2 = 120$
e) $y^2 = 36x$
f) $y = x^2 - 2x + 3$
g) $x = -3y^2 + y + 5$

Solución

a) Para comprobar si la ecuación $x^2+y^2+2x+6y+1=0$ corresponde a una circunferencia, se forman cuadrados perfectos para determinar su centro y su radio.

$$x^2+y^2+2x+6y+1=0 \Leftrightarrow (x+1)^2-1+(y+3)^2-9+1=0 \Leftrightarrow (x+1)^2+(y+3)^2=9$$

En efecto, la ecuación corresponde a una circunferencia de centro (-1, -3) y radio 3.

b) La ecuación $2x^2+2y^2-4x+4y+19=0$ puede corresponder a una circunferencia, veamos si es así dividiéndola primero por 2 y formando luego cuadrados perfectos.

$$x^2+y^2-2x+2y+\frac{19}{2}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x^2-2x\right)+\left(y^2+2y\right)+\frac{19}{2}=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (x-1)^2-1+(y+1)^2-1+\frac{19}{2}=0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2+(y+1)^2=\frac{-15}{2}$$

Esta ecuación no corresponde a ninguna cónica, es más, no existe ningún punto del plano que la verifique, ya que la suma de cuadrados no puede ser igual a un número negativo.

c) Como la ecuación $x^2 + 4y^2 = 100$ tiene los coeficientes de x^2 y de y^2 distintos, pero del mismo signo, puede corresponder a la ecuación reducida de una elipse, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Para comprobarlo, se divide la ecuación por 100 quedando $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1$, que corresponde a la ecuación reducida de una elipse de semiejes 10 y 5.

d) Como la ecuación $8x^2 - 3y^2 = 120$ tiene los coeficientes de x^2 y de y^2 distintos y de signo contrario, puede corresponder a la ecuación reducida de una hipérbola, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

Para comprobarlo, se divide la ecuación por 120 quedando $\frac{x^2}{15}-\frac{y^2}{40}=1$.

En efecto, la ecuación corresponde a la ecuación reducida de una hipérbola.

e) La ecuación $y^2 = 36x$ corresponde a la ecuación reducida de una parábola del tipo $y^2 = 2px$, con $p = 18$.

Por tanto, corresponde a una parábola de foco el punto $F = (9, 0)$ y directriz la recta vertical $x = -9$.

f) La ecuación $y = x^2 - 2x + 3$ corresponde a una parábola de eje vertical $x = \frac{2}{2} = 1$ y ramas hacia arriba, ya que el coeficiente de x^2 es positivo.

g) La ecuación $x = -3y^2 + y + 5$ corresponde a una parábola de eje horizontal $y = \frac{-1}{-6} = \frac{1}{6}$ y ramas hacia la izquierda, ya que el coeficiente de y^2 es negativo.