4. Dada la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 12x + 10y - 11 = 0$, calcular las rectas tangentes a ella que son paralelas a la recta $x + y + 4 = 0$.

Solución

La ecuación de cualquier recta paralela a $x + y + 4 = 0$ se puede escribir de la forma $x + y + k = 0$. Para que sea tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 - 12x + 10y - 11 = 0$, el sistema formado por ambas ecuaciones deberá tener una única solución.

Sustituyendo $y = -k - x$ en la ecuación de la circunferencia y realizando operaciones se tiene:

$$x^2 + (-k - x)^2 - 12x + 10(-k - x) - 11 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 + k^2 + 2kx + x^2 - 12x - 10k - 10x - 11 = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 2x^2 + (2k - 22)\, x + k^2 - 10k - 11 = 0$$

Para que esta ecuación de segundo grado tenga una única solución es necesario que su discriminante sea nulo, es decir, $(2k - 22)^2 - 4\cdot 2\,(k^2 - 10k - 11) = 0$.

Realizando operaciones se obtiene la ecuación $k^2 + 2k - 143 = 0$ que tiene por soluciones:

$$k = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 572}}{2} = \frac{-2 \pm 24}{2} = \begin{cases} 11 \\ -13 \end{cases}$$

Por tanto, las rectas pedidas son $x + y + 11 = 0$ y $x + y - 13 = 0$.