3. Decir la posición relativa de la recta $y = 3 - 2x$ respecto de las circunferencias:

a) $x^2 + y^2 - 2x + 3y + 2 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 3x + 4y - 3 = 0$

c) $2x^2 + 2y^2 + 3x + 5y - 5 = 0$

Solución

Si la recta corta a la circunferencia en dos, uno o ningún punto será respectivamente secante, tangente o exterior a dicha circunferencia.

Como los puntos de corte pertenecen tanto a la recta como a la circunferencia, para calcularlos hay que resolver el sistema formado por ambas ecuaciones.

a) Sustituyendo la ecuación de la recta $y = 3 - 2x$ en la de la circunferencia y realizando operaciones se tiene:

$$x^2 + (3 - 2x)^2 - 2x + 3(3 - 2x) + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 9 - 12x + 4x^2 - 2x + 9 - 6x + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5x^2 - 20x + 20 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 0$$

La única solución es $x = 2$, y sustituyendo en $y = 3 - 2x$, se obtiene $y = -1$.

Así, la recta corta a la circunferencia en un único punto, el (2, -1), y por tanto, la recta es tangente a la circunferencia.

b) Sustituyendo la ecuación de la recta $y = 3 - 2x$ en la de la circunferencia y realizando operaciones se tiene:

$$x^2 + (3 - 2x)^2 - 3x + 4(3 - 2x) - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 9 - 12x + 4x^2 - 3x + 12 - 8x - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5x^2 - 23x + 18 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{23 \pm \sqrt{529 - 360}}{10} = \frac{23 \pm 13}{10} = \begin{cases} \frac{36}{10} = \frac{18}{5} \\ \frac{10}{10} = 1 \end{cases}$$

Al haber dos soluciones, hay dos puntos de corte y, por tanto, la recta es secante a la circunferencia.

c) Sustituyendo la ecuación de la recta $y = 3 - 2x$ en la ecuación de la circunferencia y realizando operaciones se tiene:

$$2x^2 + 2(3 - 2x)^2 + 3x + 5(3 - 2x) - 5 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 2(9 - 12x + 4x^2) + 3x + 15 - 10x - 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 18 - 24x + 8x^2 - 7x + 10 = 0 \Leftrightarrow 10x^2 - 31x + 28 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{31 \pm \sqrt{961 - 1120}}{20}$$

Al no existir solución, por ser el discriminante negativo, no hay puntos de corte y, por tanto, la recta es exterior a la circunferencia.