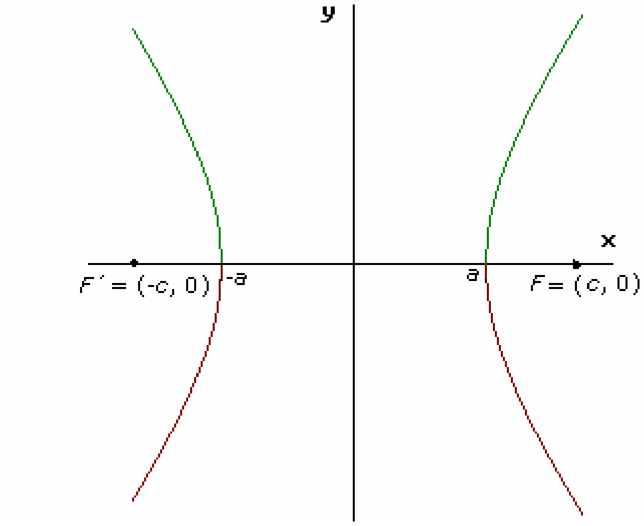
HIPÉRBOLA

Una **hipérbola de focos *F* y *F´***, puntos fijos del plano, es el conjunto de puntos cuya diferencia de distancias a los focos es igual a una constante.

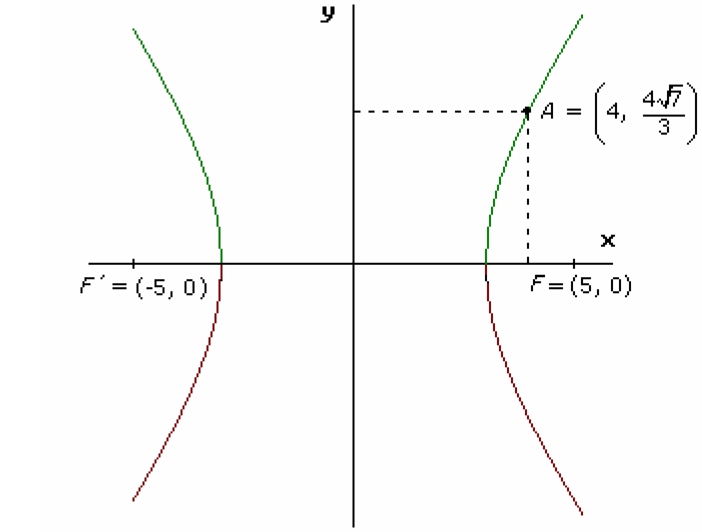
Si la constante se representa por 2*a* y los focos se colocan en puntos del eje *OX* simétricos respecto del origen, *F* = (*c*, 0) y *F´* = (-*c*, 0), se obtiene la *ecuación reducida* de la hipérbola procediendo como sigue:

El punto *X* = (*x*, *y*) del plano pertenecerá a la hipérbola si verifica *d*(*X*, *F*) - *d*(*X*, *F´*) = 2*a*, es decir, si $\sqrt{(x-c)^2+y^2} - \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a$.

Realizando operaciones, se obtiene $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2-a^2} = 1$ y denotando $c^2 - a^2 = b^2$ la ecuación de la hipérbola se escribe $\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$



Ejemplo 3: Escribir la ecuación de la hipérbola de focos *F* = (5, 0) y *F´* = (-5, 0), que pasa por el punto $A = \left(4, \frac{4\sqrt{7}}{3}\right)$.



Considerando la ecuación de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$, en este ejemplo se conoce c = 5 y se puede calcular a, ya que $2a = d(A, F') - d(A, F) = \sqrt{(4+5)^2 + \left(\frac{4\sqrt{7}}{3}\right)^2} - \sqrt{(4-5)^2 + \left(\frac{4\sqrt{7}}{3}\right)^2} = \sqrt{81 + \frac{112}{9}} - \sqrt{1 + \frac{112}{9}} = \sqrt{\frac{841}{9}} - \sqrt{\frac{121}{9}} = \frac{29}{3} - \frac{11}{3} = \frac{18}{3} = 6$. De ahí que a = 3, y por tanto la ecuación de la hipérbola es $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25-9} = 1$, es decir, $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.

De las hipérbolas cuyos focos no están en el eje *OX* o no son simétricos respecto al origen merece la pena señalar aquellas cuya ecuación es de la forma $x.y = k$. Teniendo en cuenta el signo de k, se deduce que para $k<0$ la hipérbola está en el segundo y cuarto cuadrante, para $k>0$ la hipérbola está en el primer y tercer cuadrante y para $k=0$ la hipérbola viene representada por los ejes de coordenadas y se denomina hipérbola degenerada.

Ejemplo 4: La representación de la hipérbola de ecuación $x.y = 1$ es: