Autoras: Gloria Jarne, Esperanza Minguillón, Trinidad Zabal

NÚMEROS RACIONALES Y NÚMEROS IRRACIONALES

La ampliación del conjunto de los números enteros al de los racionales, hace que la división de cualquier número entre otro no nulo se pueda realizar en el nuevo conjunto. Así, por ejemplo, en el conjunto de los números enteros, la ecuación $4x = 7$ no tiene solución; sin embargo, en el conjunto de los números racionales sí que se puede resolver, siendo su solución $x = \frac{7}{4}$.

El conjunto de **números racionales** es $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z} \text{ y } b \neq 0\right\}$.

Así pues el conjunto de los números racionales surge al añadir al de los enteros las llamadas **fracciones**.

Es inmediato que cualquier número entero, $a \in \mathbb{Z}$, es también racional, ya que $a = \frac{a}{1} \in \mathbb{Q}$, es decir, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Notar que un número racional puede ser representado por diferentes fracciones, las cuales son *equivalentes* entre sí. Esto se deduce de la propiedad que dice que si el numerador y el denominador de una fracción se multiplican o dividen por el mismo número entero no nulo, la fracción obtenida es equivalente a la primera. Normalmente, para representar un número racional se utiliza una fracción irreducible, que es aquella cuyo numerador y denominador son números primos entre sí (Ver Unidad Didáctica 1).

Ejemplo 6:

a) Son números racionales 4, -7, $\frac{5}{3}$, $\frac{-4}{7}$ ... .

b) El número racional $\frac{1}{8}$ admite diferentes representaciones en forma de fracción, $\frac{1}{8} = \frac{-5}{-40} = \frac{3}{24} = \ldots$. Todas estas fracciones son equivalentes entre sí y $\frac{1}{8}$ es la fracción irreducible.

c) Puede resultar conveniente simplificar, si es posible, la fracción que representa un número racional para encontrar otra equivalente más sencilla, por ejemplo, $\frac{735}{315} = \frac{105}{45} = \frac{35}{15} = \frac{7}{3}$.

d) $\sqrt{5}$ no es un número racional puesto que no se puede representar por una fracción cuyo numerador y denominador sean números enteros. Por la misma razón, $\frac{-\sqrt{2}}{6}$, $\sqrt{3}+1$ y $5e$ tampoco son números racionales.

Representación decimal de los números racionales

Cualquier número racional se puede expresar como un número entero o decimal sin más que hacer la división entre el numerador y el denominador de cualquiera de las fracciones que lo representan. Según el tipo de expresión decimal obtenida los números racionales se clasifican como sigue:

- **Número entero**: no tiene ninguna cifra decimal, es decir, la división entera (sin sacar cifras decimales) entre el numerador y el denominador de cualquiera de las fracciones que lo representan es exacta.

- **Número decimal**: tiene alguna cifra decimal, es decir, la división entera entre el numerador y el denominador de cualquiera de las fracciones que lo representan no es exacta. Según el número de cifras decimales se distinguen:
  - **Número decimal finito o exacto**: tiene un número finito de cifras decimales, es decir, al realizar la división entre el numerador y el denominador se obtiene resto cero.
  - **Número decimal periódico**: tiene un número infinito de cifras decimales, pero hay un bloque de ellas llamado **periodo** que se repite indefinidamente y que se representa bajo el símbolo "$\frown$"; es decir, al realizar la división entre el numerador y el denominador nunca se obtiene resto cero y, por tanto, la división no termina nunca. Pueden ser:
    - **Número decimal periódico puro**: el periodo aparece inmediatamente después de la coma decimal.
    - **Número decimal periódico mixto**: el periodo no aparece inmediatamente después de la coma decimal. En este caso se llama **anteperiodo** a la parte decimal anterior al periodo, es decir, a los números que hay entre la coma decimal y el periodo.

Ejemplo 7:

a) $\frac{-20}{5} = -4$ es un número entero.

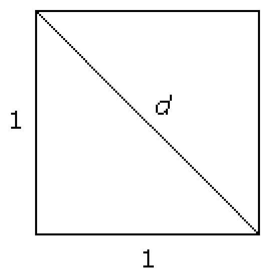
b) $\frac{-3}{50} = -0'06$ y $\frac{4}{5} = 0'8$ son número decimales finitos o exactos.

c) $\frac{13}{3} = 4'33333... = 4'\overset{\frown}{3}$ es un número decimal periódico puro cuyo periodo es 3.

d) $-1'1666... = -1'1\overset{\frown}{6}$ es un número decimal periódico mixto cuyo periodo es 6 y cuyo anteperiodo es 1. En forma de fracción es $-1'1\overset{\frown}{6} = -\frac{116-11}{90} = -\frac{105}{90} = -\frac{7}{6}$.

e) $\frac{937}{330} = 3'0212121... = 3'0\overset{\frown}{21}$ es un número decimal periódico mixto cuyo periodo es 21 y cuyo anteperiodo es 0.

Los números irracionales surgen por la imposibilidad de resolver en **Q** ciertos problemas. Por ejemplo, si se quiere calcular la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 1, esto no es posible hacerlo en el conjunto de los números racionales, ya que por el Teorema de Pitágoras, llamando d a la longitud buscada, se ha de cumplir que $d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$, de donde, $d = \sqrt{2}$ que no es un número racional puesto que no se puede expresar como una fracción, en otras palabras, la expresión decimal de $\sqrt{2}$ tiene infinitas cifras decimales.



El conjunto de **números irracionales** se representa por I y está formado por todos los números decimales cuya parte decimal tienen infinitas cifras no periódicas, es decir, por todos los números que no se pueden representar por el cociente de dos números enteros.

Es inmediato que no existe ningún número que sea racional e irracional, es decir, $\mathbb{Q} \cap \mathrm{I} = \varnothing$.

Ejemplo 8:

a) Son números irracionales $\sqrt{3}$ = 1'7320508... , 1 - $\sqrt{5}$ y $\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$ entre otros.

b) Otro número irracional es π = 3'14159265... que es la proporción entre la longitud de una circunferencia y su diámetro.

c) Otro número irracional es $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ = 2'71828182845905... .