NÚMEROS NATURALES Y NÚMEROS ENTEROS

Los números naturales surgen como respuesta a la necesidad de nuestros antepasados de contar los elementos de un conjunto (por ejemplo los animales de un rebaño) y de asignar un símbolo a una determinada cantidad de objetos.

A lo largo de la historia, cada cultura ha utilizado diferentes símbolos para representar un número y ha usado distintas reglas para escribirlos y trabajar con ellos. En otras palabras, se han utilizado diferentes *sistemas de numeración*: sistema egipcio, sistema romano, sistema chino, sistema decimal, sistema binario (utilizado como lenguaje interno de los ordenadores), ...

El primer conjunto numérico que se considera es el de los **números naturales** representado por $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$.

Hay que señalar que no existe acuerdo sobre si el 0 es o no es un número natural. En esta unidad didáctica se considera que no lo es.

Ejemplo 1: Son números naturales 3, 8, 104 ...

No son números naturales -3, 0, $\frac{4}{5}$, $\sqrt[3]{7}$ ...

En este conjunto la **suma** y el **producto** son operaciones internas, es decir, dados dos números naturales, a y b, su suma, $a + b$, es otro número natural y su producto, $a.b$, también lo es.

La operación producto también se puede representar con el símbolo "×", es decir, $a.b = a \times b$. Incluso, es habitual no poner ningún símbolo, representando el producto de a y b simplemente por ab.

En el conjunto de los números naturales se pueden realizar otras dos operaciones, la **resta** y la **división**, pero ninguna de las dos es una operación interna, ya que el resultado de restar o dividir dos números naturales no siempre es un número natural. Esta es precisamente una de las razones por la que este conjunto numérico resulta insuficiente a la hora de resolver ciertos problemas.

Ejemplo 2:

a) En el conjunto de los números naturales se puede realizar la operación 11-4 ya que 11-4 = 7 es un número natural. Sin embargo, la operación 4-10 no se puede realizar en $\mathbb{N}$ ya que 4-10 = -6 no es un número natural.

   En el conjunto de los números naturales se puede realizar la operación 12:3 ya que 12:3 = 4 es un número natural. Sin embargo, la operación 6:4 no se puede realizar en $\mathbb{N}$ ya que $6:4 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ no es un número natural.

b) La ecuación $x + 3 = 1$ no se puede resolver en $\mathbb{N}$ ya que despejando x queda $x = 1-3 = -2$ que no es un número natural.

La ampliación del conjunto de los números naturales al de los números enteros hace que la resta sea una operación interna en el nuevo conjunto, de manera que tienen solución en él algunas ecuaciones que en $\mathbb{N}$ no se pueden resolver. Así, por ejemplo, la ecuación $7 + x = 3$ tiene como solución $x = 3 - 7 = -4$ que no es un número natural pero sí es un número del nuevo conjunto.

El conjunto de los **números enteros** es $\mathbb{Z} = \{ ..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$.

Así pues, el conjunto de los números enteros surge al añadir a $\mathbb{N}$ el 0 y todos los números que aparecen al cambiar el signo a los naturales. Por tanto, es claro que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Ejemplo 3: Son números enteros 15, -15, 0, 4 ...
No son números enteros $\frac{-8}{3}$, π, $2\sqrt{5}$, $e+1$ ...

En $\mathbb{Z}$, la **suma**, la **resta** y el **producto** son operaciones internas, pero no lo es la **división**.

Ejemplo 4:

a) $4 - 9 = -5$

b) $(15-3):(2+1) = 12:3 = 4$

c) La operación 7:5 no se puede realizar en $\mathbb{Z}$ ya que $7:5 = \frac{7}{5}$ no es un número entero.

d) La ecuación $5 + x = 1$ se puede resolver en $\mathbb{Z}$, siendo su solución $x = 1 - 5 = -4$.

e) La ecuación $3x = -4$ no se puede resolver en $\mathbb{Z}$ ya que su solución $x = -4:3 = \frac{-4}{3}$ no es un número entero.

Para realizar el producto o la división de dos números enteros es necesario tener en cuenta las siguientes *reglas de signos*.

Si $a, b \in \mathbb{Z}$, se verifica:

1. $a > 0$ y $b > 0 \Rightarrow a.b > 0$ y $a:b > 0$
2. $a < 0$ y $b < 0 \Rightarrow a.b > 0$ y $a:b > 0$
3. $a > 0$ y $b < 0 \Rightarrow a.b < 0$ y $a:b < 0$
4. $a < 0$ y $b > 0 \Rightarrow a.b < 0$ y $a:b < 0$

Simbólicamente estas reglas se pueden expresar de la siguiente forma:

1. $(+).(+) = (+)$ $(+):(+) = (+)$
2. $(-).(-) = (+)$ $(-):(-) = (+)$
3. $(+).(-) = (-)$ $(+):(-) = (-)$
4. $(-).(+) = (-)$ $(-):(+) = (-)$

Ejemplo 5:

a) $4.(-3) = -12$; $(-5).(-2) = 10$; $8:(-2) = -4$

b) $3.(-2) - 5.(-7) = -6 - (-35) = -6 + 35 = 29$

c) $-5.3.(-4).(-2) = -120$

d) $(-10).(-3):(-6) = 30:(-6) = -5$