NÚMEROS NATURALES Y NÚMEROS ENTEROS

El primer conjunto numérico que se considera es el de los **números naturales** representado por $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$.

Hay que señalar que no existe acuerdo sobre si el 0 es o no es un número natural. En esta unidad didáctica se considera que no lo es.

Ejemplo 1: Son números naturales 3, 8, 104 ...

No son números naturales -3, 0, $\frac{4}{5}$, $\sqrt[3]{7}$ ...

El conjunto de los **números enteros** es $\mathbb{Z} = \{ ..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$.

Así pues, el conjunto de los números enteros surge al añadir a $\mathbb{N}$ el 0 y todos los números que aparecen al cambiar el signo a los naturales. Por tanto, es claro que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Ejemplo 3: Son números enteros 15, -15, 0, 4 ...

No son números enteros $\frac{-8}{3}$, π, $2\sqrt{5}$, $e+1$ ...

NÚMEROS RACIONALES Y NÚMEROS IRRACIONALES

El conjunto de **números racionales** es $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z} \text{ y } b \neq 0\right\}$.

Así pues el conjunto de los números racionales surge al añadir al de los enteros las llamadas **fracciones**.

Es inmediato que cualquier número entero, $a \in \mathbb{Z}$, es también racional, ya que $a = \frac{a}{1} \in \mathbb{Q}$, es decir, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Notar que un número racional puede ser representado por diferentes fracciones, las cuales son *equivalentes* entre sí. Esto se deduce de la propiedad que dice que si el numerador y el denominador de una fracción se multiplican o dividen por el mismo número entero no nulo, la fracción obtenida es equivalente a la primera. Normalmente, para representar un número racional se utiliza una fracción irreducible, que es aquella cuyo numerador y denominador son números primos entre sí (Ver Unidad Didáctica 1).

Ejemplo 6:

a) Son números racionales 4, -7, $\frac{5}{3}$, $\frac{-4}{7}$ ... .

b) El número racional $\frac{1}{8}$ admite diferentes representaciones en forma de fracción, $\frac{1}{8} = \frac{-5}{-40} = \frac{3}{24} = ...$. Todas estas fracciones son equivalentes entre sí y $\frac{1}{8}$ es la fracción irreducible.

c) Puede resultar conveniente simplificar, si es posible, la fracción que representa un número racional para encontrar otra equivalente más sencilla, por ejemplo, $\frac{735}{315} = \frac{105}{45} = \frac{35}{15} = \frac{7}{3}$.

d) $\sqrt{5}$ no es un número racional puesto que no se puede representar por una fracción cuyo numerador y denominador sean números enteros. Por la misma razón, $\frac{-\sqrt{2}}{6}$, $\sqrt{3}+1$ y $5e$ tampoco son números racionales.

El conjunto de **números irracionales** se representa por $\mathbb{I}$ y está formado por todos los números decimales cuya parte decimal tienen infinitas cifras no periódicas, es decir, por todos los números que no se pueden representar por el cociente de dos números enteros.

Es inmediato que no existe ningún número que sea racional e irracional, es decir, $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \varnothing$.

Ejemplo 8:

a) Son números irracionales $\sqrt{3}$ = 1'7320508... , $1 - \sqrt{5}$ y $\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$ entre otros.

b) Otro número irracional es π = 3'14159265... que es la proporción entre la longitud de una circunferencia y su diámetro.

c) Otro número irracional es $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ = 2'71828182845905... .

NÚMEROS REALES

El **conjunto de los números reales**, $\mathbb{R}$, es la unión del conjunto de los números racionales y el conjunto de los números irracionales, es decir, $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

Es inmediato que dado un número real cualquiera o bien es racional o bien es irracional ya que la intersección de $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$ es vacía.

Ejemplo 9: Los siguientes números son números reales: 504, -13, $\frac{7}{5}$, $1'4\overset{\frown}{32}$, $5+2\sqrt[5]{3}$, $\frac{-4}{\sqrt{3}+5}$, $1-e$, π^2