Operaciones en el conjunto de números reales

La **suma** es una operación interna en R y sus propiedades se enumeran a continuación. Dados a, b y $c \in$ R se verifica:

1. *Asociativa*: $(a+b) + c = a + (b+c)$
2. *Elemento neutro*: es el número 0, ya que $a + 0 = 0 + a = a$
3. *Elemento simétrico*: Dado a, su elemento simétrico, llamado *opuesto*, es $-a$, ya que se cumple $a + (-a) = (-a) + a = 0$
4. *Conmutativa*: $a+b = b+a$

Con estas propiedades se puede decir que el conjunto de los números reales con la operación suma es un **grupo conmutativo**.

El hecho de que dado cualquier número real exista su elemento opuesto permite que la **resta** en R, definida por $a - b = a + (-b)$, sea una operación interna.

El **producto** es una operación interna en R y sus propiedades se enumeran a continuación. Dados a, b y $c \in$ R se verifica:

1. *Asociativa*: $(a.b).c = a.(b.c)$
2. *Elemento neutro*: es el número 1, ya que $1.a = a.1 = a$
3. *Elemento simétrico*: Dado $a \neq 0$, su elemento simétrico, llamado *inverso*, es $a^{-1} = \frac{1}{a}$, ya que se cumple $a.\frac{1}{a} = \frac{1}{a}.a = 1$.
4. *Conmutativa*: $a.b = b.a$
5. *Distributiva respecto de la suma*: $a.(b+c) = a.b + a.c$

Con estas propiedades y las enumeradas para la suma se puede decir que el conjunto de los números reales con las operaciones suma y producto es un **cuerpo conmutativo**.

El hecho de que dado cualquier número real no nulo exista su elemento inverso permite que la **división** en R, definida por $a:b = a.b^{-1} = a.\frac{1}{b} = \frac{a}{b}$, exista siempre que b sea no nulo.

Para realizar el producto o la división de dos números reales es necesario tener en cuenta las siguientes *reglas de signos*.

Si a, $b \in$ R, se verifica:

1. $a > 0$ y $b > 0 \Rightarrow a.b > 0$ y $a:b > 0$
2. $a < 0$ y $b < 0 \Rightarrow a.b > 0$ y $a:b > 0$
3. $a > 0$ y $b < 0 \Rightarrow a.b < 0$ y $a:b < 0$
4. $a < 0$ y $b > 0 \Rightarrow a.b < 0$ y $a:b < 0$

Simbólicamente estas reglas se pueden expresar de la siguiente forma:

1. (+).(+) = (+) (+):(+) = (+)
2. (-).(-) = (+) (-):(-) = (+)
3. (+).(-) = (-) (+):(-) = (-)
4. (-).(+) = (-) (-):(+) = (-)

Ejemplo 5:

a) 4.(-3) = -12; (-5).(-2) = 10; 8:(-2) = -4

b) 3.(-2) – 5.(-7) = -6 – (-35) = -6 + 35 = 29

c) -5.3.(-4).(-2) = -120

d) (-10).(-3):(-6) = 30:(-6) = -5

Ejemplo 10:

a) Teniendo en cuenta la propiedad asociativa, el producto $-8.\frac{1}{2}.25$ se puede calcular de las dos formas siguientes:

$$\left(-8.\frac{1}{2}\right).25 = -4.25 = -100$$

$$-8.\left(\frac{1}{2}.25\right) = -8.\frac{25}{2} = \frac{-200}{2} = -100$$

b) (10+4).6 = 14.6 = 84

Por la propiedad distributiva también se podía haber operado como sigue: (10+4).6 = 10.6 + 4.6 = 60 + 24 = 84

c) 375.11 – 425.11 = 4125 – 4675 = -550

Por la propiedad distributiva también se podía haber operado como sigue:

375.11 – 425.11 = (375-425).11 = -50.11 = -550

En este caso, aplicar la propiedad distributiva equivale a *sacar factor común* el número 11.

d) Aplicando la propiedad distributiva en las dos expresiones siguientes se tiene:

$$5.(a+3) = 5a + 15$$

$$-3.\left(5+\frac{\sqrt{2}}{3}\right) = -15 - \sqrt{2}$$

e) El elemento inverso de $\frac{3}{2}$ es $\frac{2}{3}$, ya que $\frac{3}{2}.\frac{2}{3} = \frac{3.2}{2.3} = \frac{6}{6} = 1$

f) El elemento inverso de $\frac{-4}{3}$ es $\frac{1}{\frac{-4}{3}} = \frac{-3}{4}$

Notar que para realizar operaciones combinadas hay que tener en cuenta la prioridad entre las operaciones. Si hay paréntesis, estos se calculan en primer lugar y si no los hay los productos y divisiones tienen prioridad a las sumas y restas.

Ejemplo 11:

a) -8+5.3 = -8+15 = 7. Esta operación no da el mismo resultado que (-8+5).3 = -3.3 = -9

b) En el caso en que se sucedan multiplicaciones y divisiones sin paréntesis, se tiene que comenzar a efectuarlas por la izquierda. Así, la operación 6:3.2 se debe realizar como sigue: 6:3.2 = 2.2 = 4 y no es correcto realizar en primer lugar el producto 3.2