NÚMEROS COMPLEJOS

CONCEPTOS

En el conjunto de los números reales, una ecuación tan sencilla como $x^2 + 1 = 0$ no se puede resolver ya que es equivalente a $x^2 = -1$ y no existe ningún número real cuyo cuadrado sea negativo. Así, para resolver este tipo de ecuaciones, es necesario construir un conjunto de números que contenga a los reales y en el que se puedan calcular las raíces cuadradas y, en general, de índice par de números negativos.

Un **número complejo** es un número de la forma $a+bi$, donde a y b son números reales, llamados **parte real** y **parte imaginaria** respectivamente, e i es la **unidad imaginaria** que se define como $i = \sqrt{-1}$.

El **conjunto de números complejos** es $C = \{a+bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

Los números complejos con parte imaginaria no nula, es decir de la forma $a+bi$ con $b \neq 0$, se llaman **números imaginarios** y si además la parte real es nula, es decir son de la forma bi, se llaman **números imaginarios puros**. Si la parte imaginaria del número complejo $a+bi$ es nula, entonces se tiene el número real $a+0i = a$, de donde se deduce que $\mathbb{R} \subset C$.

Se dice que dos números complejos son **iguales** si lo son sus partes reales y sus partes imaginarias. Es decir, $a+bi = c+di$ si se verifica $a = c$ y $b = d$.

Ejemplo 1:

a) $\sqrt{3}-4i$ es un número complejo con parte real $\sqrt{3}$ y parte imaginaria -4.

b) El número real -2 se puede considerar como un número complejo con parte real -2 y parte imaginaria 0, ya que se puede escribir $-2 = -2+0i$.

c) $\frac{2}{7}i$ es un número complejo con parte real 0 y parte imaginaria $\frac{2}{7}$, por tanto, es un número imaginario puro.

Dado un número complejo, $a+bi$, su **conjugado** es otro número complejo que tiene la misma parte real y la parte imaginaria de signo contrario. Se representa $\overline{a+bi} = a-bi$.

Ejemplo 2: $\overline{3+4i} = 3-4i$, $\overline{\frac{4}{3}-i} = \frac{4}{3}+i$, $\overline{5} = 5$, $\overline{2i} = -2i$

Se verifica que el conjugado del conjugado de un número complejo es el mismo número, es decir, $\overline{\overline{a+bi}} = a+bi$.

Algunas ecuaciones que no se pueden resolver en el conjunto de los números reales, tienen solución en el conjunto C. En general, se verifica que toda ecuación polinómica con coeficientes reales de grado n tiene n soluciones en el conjunto de los números complejos, pudiendo ser éstas números reales o imaginarios. Además, si tiene como solución un número imaginario, también es solución el conjugado de éste.

Ejemplo 3:

a) La ecuación $x^2 + 9 = 0$ es equivalente a $x^2 = -9$, por tanto, no tiene solución en R. Sin embargo, sí la tiene en C ya que en este conjunto se pueden realizar las siguientes operaciones:

$$x = \pm\sqrt{-9} = \pm\sqrt{9}\sqrt{-1} = \pm 3i$$

Por tanto, en el conjunto de los números complejos la ecuación tiene dos soluciones que son $x = -3i$ y $x = 3i$ y se observa que son números complejos conjugados entre sí.

b) La ecuación $x^2 - 4x + 5 = 0$ no tiene solución en R, ya que aplicando la fórmula de resolución de ecuaciones polinómicas de segundo grado se tiene $x = \dfrac{4 \pm\sqrt{(-4)^2 - 4.1.5}}{2} = \dfrac{4\pm\sqrt{-4}}{2}$ y se concluye que no existe solución real ya que el discriminante es negativo. Sin embargo, si la ecuación se resuelve en el conjunto de los números complejos tiene dos soluciones que son $x = \dfrac{4\pm\sqrt{-4}}{2} = \dfrac{4\pm\sqrt{4}\sqrt{-1}}{2} = \dfrac{4\pm 2i}{2} = \begin{cases} 2+i \\ 2-i \end{cases}$

Por tanto, las soluciones en C son $x = 2+i$ y $x = 2-i$, que son dos números imaginarios conjugados entre sí.

c) La ecuación $x^3 - x^2 + 16x - 16 = 0$ tiene una solución real que es $x = 1$. Aplicando la Regla de Ruffini se obtiene:

$$x^3 - x^2 + 16x - 16 = (x-1)(x^2 + 16)$$

Como la ecuación $x^2 + 16 = 0$ no tiene solución en R, se concluye que $x = 1$ es la única solución real de la ecuación inicial.

Sin embargo, en C tiene otras dos soluciones, ya que en este conjunto se tiene:

$$x^2 + 16 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -16 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{-16} = \pm\sqrt{16}\sqrt{-1} = \begin{cases} 4i \\ -4i \end{cases}$$

Por tanto, las soluciones de la ecuación inicial en C son $x = 1$, $x = 4i$ y $x = -4i$, siendo las dos últimas dos números complejos conjugados entre sí.

OPERACIONES

Suma de números complejos

Dados dos números complejos se define su suma como otro número complejo cuya parte real es la suma de las partes reales y cuya parte imaginaria es la suma de las partes imaginarias.

$$(a+bi) + (c+di) = (a+c)+(b+d)i$$

Ejemplo 4:

a) $(3-2i) + (4+5i) = (3+4)+(-2+5)i = 7+3i$

b) En la práctica es habitual no poner cada sumando entre paréntesis. Así, para sumar $4+\frac{1}{3}i$ y $\frac{3}{2}+\frac{2}{3}i$ se procede como sigue:

$$4+\frac{1}{3}i + \frac{3}{2}+\frac{2}{3}i = 4+\frac{3}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)i = \frac{11}{2}+1i = \frac{11}{2}+i$$

Propiedades

1. *Asociativa*: $[(a+bi) + (c+di)] + (e+fi) = (a+bi) + [(c+di) + (e+fi)]$
2. *Elemento neutro*: es el número $0 = 0+0i$, ya que se cumple $(a+bi) + 0 = 0 + (a+bi) = a+bi$
3. *Elemento simétrico*: Dado $a+bi$ su elemento simétrico, llamado *opuesto*, es $-(a+bi) = -a-bi$, ya que se cumple $(a+bi) + (-a-bi) = (-a-bi) + (a+bi) = 0$

4. *Conmutativa*: $(a+bi) + (c+di) = (c+di) + (a+bi)$

Con estas propiedades se puede decir que el conjunto de los números complejos con la operación suma es un **grupo conmutativo**.

El hecho de que dado cualquier número complejo exista su elemento opuesto permite definir la **resta** en *C* de la forma:

$$(a+bi) - (c+di) = (a+bi) + (-(c+di)) = (a+bi) + (-c-di)) = (a-c)+(b-d)i$$

que es una operación interna.

Producto de números complejos

Dados dos números complejos $a+bi$ y $c+di$ su producto es otro número complejo de la forma

$$(a+bi).(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$$

Ejemplo 5: $(3-2i).(4+7i) = (3.4-(-2)7) + (3.7+(-2)4)i = 26+13i$

Propiedades

1. *Asociativa*: $[(a+bi).(c+di)].(e+fi) = (a+bi).[(c+di).(e+fi)]$
2. *Elemento neutro*: es el número $1 = 1+0i$, ya que se cumple $(a+bi).1 = 1.(a+bi) = a+bi$
3. *Elemento simétrico*: Dado $a+bi \neq 0$, su elemento simétrico, llamado *inverso*, es $(a+bi)^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$, ya que se cumple $(a+bi).\left(\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i\right) = \left(\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i\right).(a+bi) = 1$
4. *Conmutativa*: $(a+bi).(c+di) = (c+di).(a+bi)$
5. *Distributiva respecto de la suma*:

$$(a+bi).[(c+di) + (e+fi)] = [(a+bi).(c+di)] + [(a+bi).(e+fi)]$$

Con estas propiedades y las enumeradas para la suma se puede decir que el conjunto de los números complejos con las operaciones suma y producto es un **cuerpo conmutativo**.

En la práctica, el producto de dos números complejos se obtiene multiplicando las expresiones $a+bi$ y $c+di$ utilizando la propiedad distributiva y teniendo en cuenta que $i^2 = -1$:

$$(a+bi).(c+di) = ac+adi+bic+bdi^2 = ac+adi+bci-bd = (ac-bd) + (ad+bc)i$$

Ejemplo 6:

a) $(3+i).4i = 12i + 4i^2 = 12i - 4 = -4 + 12i$

b) $\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{5}i\right).(2+10i) = \frac{2}{3} + \frac{10}{3}i + \frac{4}{5}i + \frac{20}{5}i^2 = \frac{2}{3} - 4 + \left(\frac{10}{3}+\frac{4}{5}\right)i = \frac{-10}{3} + \frac{62}{15}i$

Ejemplo 7:

a) El elemento inverso de $5+7i$ es $\frac{5}{5^2+7^2} - \frac{7}{5^2+7^2}i = \frac{5}{74} - \frac{7}{74}i$

b) El elemento inverso de $\sqrt{3}i$ es $\frac{-\sqrt{3}}{3}i$

El hecho de que dado cualquier número complejo no nulo exista su elemento inverso permite definir la **división** en C como:

$$(a+bi):(c+di) = (a+bi).(c+di)^{-1} = (a+bi).\left(\frac{c}{c^2+d^2} - \frac{d}{c^2+d^2}i\right) = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i, \quad \text{si } c+di \neq 0$$

En la practica, para calcular $(a+bi):(c+di) = \frac{a+bi}{c+di}$, basta multiplicar el numerador y el denominador por el conjugado del denominador y realizar operaciones:

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(ac+bd)+(-ad+bc)\,i}{(c^2+d^2)+(-cd+dc)\,i} = \frac{(ac+bd)+(-ad+bc)\,i}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

Este mismo proceso se puede utilizar para calcular el inverso de un número complejo no nulo, escribiéndolo de la forma $(a+bi)^{-1} = \frac{1}{a+bi}$ y realizando la división.

Ejemplo 8:

a) $(11+10i):(1+4i) = \frac{11+10i}{1+4i} = \frac{(11+10i)(1-4i)}{(1+4i)(1-4i)} = \frac{11-44i+10i-40i^2}{1-16i^2} = \frac{51-34i}{17} = 3-2i$

b) $(-3+7i)^{-1} = \frac{1}{-3+7i} = \frac{1(-3-7i)}{(-3+7i)(-3-7i)} = \frac{-3-7i}{9-49i^2} = \frac{-3-7i}{58} = \frac{-3}{58} - \frac{7}{58}i$

Las siguientes propiedades relacionan las operaciones anteriores con el cálculo del conjugado de un número complejo.

Propiedades

1. $\overline{k(a+bi)} = k\,\overline{a+bi}$, siendo $k \in \mathbb{R}$

2. $\overline{(a+bi)+(c+di)} = \overline{a+bi} + \overline{c+di}$

3. $\overline{-(a+bi)} = -\,\overline{a+bi}$

4. $\overline{(a+bi).(c+di)} = \overline{a+bi}\,.\,\overline{c+di}$

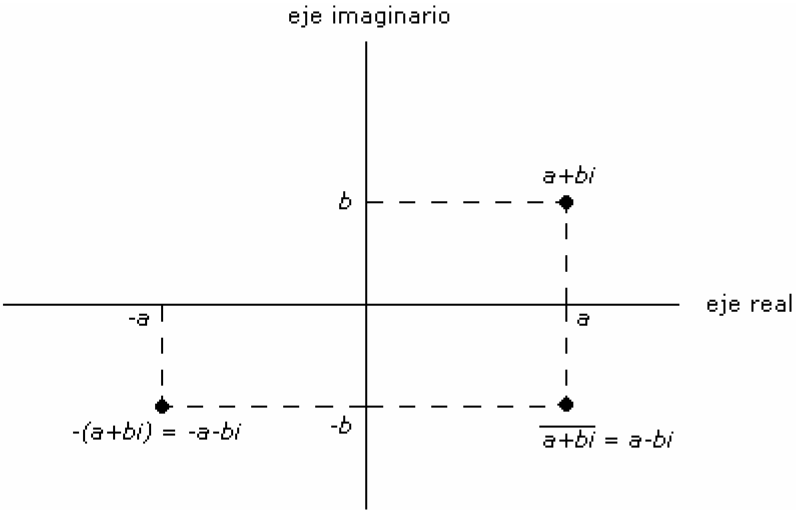
5. $\overline{(a+bi)^{-1}} = \left(\overline{a+bi}\right)^{-1}$

6. $\overline{(a+bi):(c+di)} = \overline{a+bi} : \overline{c+di}$

REPRESENTACIÓN GRÁFICA

Los números complejos se representan en el plano. Para ello se consideran los ejes coordenados y se representan en el eje de abscisas la parte real del número complejo y en el eje de ordenadas la parte imaginaria. Así, dado el número complejo $a+bi$, su representación en el plano se corresponde con el punto dado por el par (a, b). Y recíprocamente, dado un punto en el plano definido por el par (a, b), este punto representa el numero complejo $a+bi$.

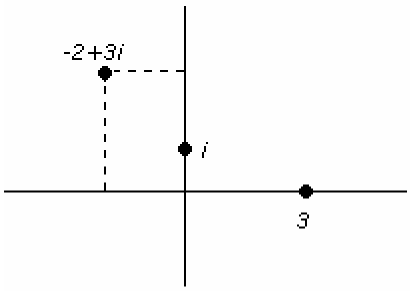
Debido a la correspondencia biunívoca que se establece entre los números complejos y los puntos del plano, éste recibe el nombre de *plano complejo*, el eje de abscisas se llama *eje real*, y el eje de ordenadas, *eje imaginario*.



Propiedades

1. Los números complejos con parte imaginaria nula (números reales) se representan en el eje de abscisas.
2. Los números complejos con parte real nula (números imaginarios puros) se representan en el eje de ordenadas.
3. Un número complejo y su opuesto vienen representados en el plano por puntos simétricos respecto al origen.
4. Un número complejo y su conjugado vienen representados en el plano por puntos simétricos respecto al eje de abscisas.

Ejemplo 9: A continuación se representan en el plano complejo los números $-2+3i$, 3 e i.



FORMA POLAR Y FORMA TRIGONOMÉTRICA

La forma en que hasta este momento se han representado los números complejos se llama **forma binómica**; sin embargo, no es la única posible. Así, el número complejo $a+bi$ se puede escribir de otras dos formas que facilitan la realización de ciertas operaciones. Para ello, previamente se han de definir los conceptos de módulo y argumento de un número complejo.

El **módulo** o **valor absoluto** del número complejo $a+bi$ es la distancia del origen de coordenadas al punto (a, b) que representa al número complejo $a+bi$. Se denota $|a+bi|$.

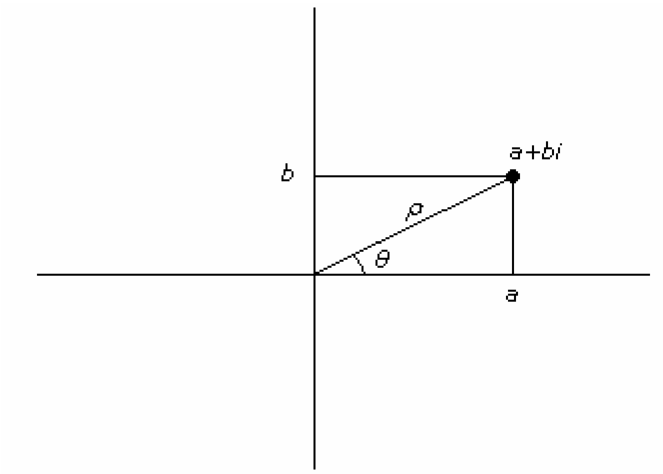
Aplicando el Teorema de Pitágoras, se obtiene que $|a+bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

El **argumento** de un número complejo $a+bi$ no nulo es el ángulo que forma el eje OX positivo con el vector que une el origen de coordenadas con el punto (a, b). Se denota $\arg(a+bi)$.

Aplicando trigonometría, se comprueba que $\arg(a+bi) = \text{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)$. (Ver Unidad Didáctica 3)

En esta Unidad Didáctica se considera que $0 \leq \arg(a+bi) < 2\pi$, aunque es igualmente válido considerar que el argumento está en cualquier otro intervalo de longitud 2π, por ejemplo, que se ha de verificar, $-\pi < \arg(a+bi) \leq \pi$.

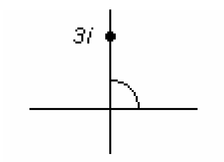
En la siguiente figura se muestran gráficamente el módulo y el argumento de un número complejo $a+bi$, que también es habitual denotarlos por ρ y θ, respectivamente.



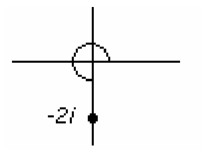
siendo $\rho = |a+bi|$ y $\theta = \arg(a+bi)$

Ejemplo 10:

a) El modulo de $3i$ es 3 y el argumento es $\frac{\pi}{2}$ como se observa en la figura.



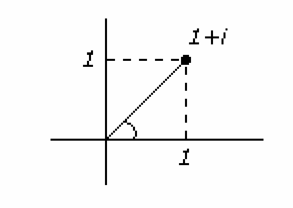
b) El módulo de $-2i$ es $|-2i| = 2$ y el argumento es $\arg(-2i) = \frac{3\pi}{2}$ como se observa en la figura.

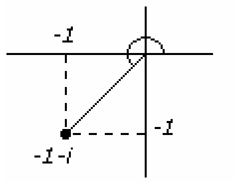


c) El módulo de $1+i$ es $|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ y el argumento es $\arg(1+i) = \text{arctg}\frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}$

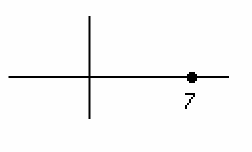
El módulo de $-1-i$ es $|-1-i| = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$ y el argumento es $\arg(-1-i) = \text{arctg}\frac{-1}{-1} = \frac{5\pi}{4}$

Observar que los argumentos de los dos números complejos son iguales a arctg1, aunque toman diferente valor dependiendo del cuadrante en que se esté, como se observa en las siguientes figuras.





d) El módulo de 7 es $|7| = \sqrt{(7)^2} = \sqrt{49} = 7$ y el argumento es $\arg(7) = \text{arctg}\frac{0}{7} = 0$



La **forma polar** de escribir el número complejo $a+bi$ es ρ_θ siendo ρ el módulo y θ el argumento de $a+bi$.

Ejemplo 11:

La forma polar de cada uno de los números complejos del ejemplo 10 es:

a) $3i = 3_{\pi/2}$

b) $-2i = 2_{3\pi/2}$

c) $1+i = \sqrt{2}_{\pi/4}$ $\qquad$ $-1-i = \sqrt{2}_{5\pi/4}$

d) $7 = 7_0$

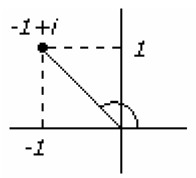
Aplicando conceptos de trigonometría (Unidad Didáctica 3), es inmediato deducir que dado un número complejo $a+bi$, su módulo ρ y su argumento θ el argumento, se cumple que $a = \rho\cos\theta$ y $b = \rho\,\text{sen}\theta$, de donde surge la forma trigonomética de escribir un número complejo.

La **forma trigonométrica** de escribir el número complejo $a+bi$ es $\rho(\cos\theta + i\,\text{sen}\theta)$ siendo ρ el módulo y θ el argumento de $a+bi$.

Ejemplo 12:

a) Se calcula a continuación la forma polar y la forma trigonométrica del número complejo $-1+i$.

Para ello es necesario calcular su módulo y su argumento:



$\rho = |-1+i| = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}$

$\theta = \arg(-1+i) = \text{arctg}\frac{1}{-1} = \frac{3\pi}{4}$

Por tanto, la forma polar es $\sqrt{2}_{3\pi/4}$ y la forma trigonométrica $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{3\pi}{4}\right)$.

b) Se calcula a continuación la forma binómica y la forma trigonométrica del número complejo 2_π.

Al estar dado en forma polar, es claro que su módulo es 2 y su argumento es π, por tanto, la forma trigonométrica es $2(\cos\pi + i\,\text{sen}\pi)$ y operando se obtiene la forma binómica $2(\cos\pi + i\,\text{sen}\pi) = 2(-1+i0) = -2$.

c) La forma binómica del número complejo $\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)$ se obtiene sin más que hacer cuentas:

$$\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{3}\ (0+i1) = \sqrt{3}\,i$$

La forma polar es inmediata teniendo en cuenta que el módulo es $\sqrt{3}$ y el argumento es $\frac{\pi}{2}$, así el número complejo en forma polar es $\sqrt{3}_{\pi/2}$.

Operaciones en forma polar y en forma trigonométrica

Las formas polar y trigonométrica permiten que la realización de determinadas operaciones de números complejos se simplifiquen.

Así, dados dos números complejos $\rho_\theta = \rho(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$ y $\omega_\alpha = \omega(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)$ se tiene:

1. El producto de dos números complejos tiene por módulo el producto de los módulos y por argumento la suma de los argumentos.

   En forma polar: $\rho_\theta.\omega_\alpha = (\rho.\omega)_{\theta+\alpha}$

   En forma trigonométrica: $\rho(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta).\omega(\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha) = (\rho.\omega)\big(\cos(\theta+\alpha)+i\operatorname{sen}(\theta+\alpha)\big)$

2. El cociente de dos números complejos, siendo el denominador no nulo, tiene por módulo el cociente de los módulos y por argumento la resta de los argumentos.

   En forma polar: $\dfrac{\rho_\theta}{\omega_\alpha} = \left(\dfrac{\rho}{\omega}\right)_{\theta-\alpha}$

   En forma trigonométrica: $\dfrac{\rho(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta)}{\omega(\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha)} = \dfrac{\rho}{\omega}\big(\cos(\theta-\alpha)+i\operatorname{sen}(\theta-\alpha)\big)$

3. La potencia *n*-ésima de un número complejo tiene por módulo la potencia *n*-ésima del módulo y por argumento *n* veces el argumento.

   En forma polar: $(\rho_\theta)^n = (\rho^n)_{n\theta}$

   En forma trigonométrica: $\big(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta\big)^n = \rho^n\big(\cos(n\theta)+i\operatorname{sen}(n\theta)\big)$

Ejemplo 13:

a) $\sqrt{3}_{\pi/4}.\,2_{\pi/3} = (\sqrt{3}.2)_{\pi/4+\pi/3} = (2\sqrt{3})_{7\pi/12}$; $\quad \dfrac{2_{\pi/3}}{\sqrt{3}_{\pi/4}} = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)_{\pi/3-\pi/4} = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)_{\pi/12}$; $\quad \big(2_{\pi/3}\big)^3 = (2^3)_{3\pi/3} = 8_\pi$

b) Para calcular el producto $(2-2i).(1+i)$, los números complejos se pueden expresar en forma polar, realizar el producto y, finalmente expresar el resultado en forma binómica.

El módulo de $2-2i$ es $\rho = |2-2i| = \sqrt{(2)^2+(-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ y el argumento es $\theta = \arg(2-2i) = \operatorname{arctg}\frac{-2}{2} = \frac{7\pi}{4}$. Por tanto, la forma polar es $(2\sqrt{2})_{7\pi/4}$.

Análogamente, el módulo de $1+i$ es ω = $|1+i|$ = $\sqrt{(1)^2+(1)^2}$ = $\sqrt{2}$ y el argumento es α = $\arg(1+i)$ = $\text{arctg}\frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}$. Por tanto, la forma polar es $\sqrt{2}_{\pi/4}$.

El producto en forma polar es $(2\sqrt{2})_{7\pi/4} \cdot \sqrt{2}_{\pi/4} = (2\sqrt{2}\sqrt{2})_{7\pi/4+\pi/4} = 4_{8\pi/4} = 4_{2\pi} = 4_0$.

Finalmente, la forma binómica del producto es $4(\cos 0+i\,\text{sen}0) = 4$.

Otra operación que se simplifica al expresar un número complejo en forma polar es el cálculo de sus raíces n-ésimas. Las **raíces *n*-ésimas** de un número complejo cuya forma polar es ρ_θ son:

$$\sqrt[n]{\rho}_{(\theta+2k\pi)/n} \text{ para } k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Ejemplo 14:

a) Las raíces cuadradas de $4_{\pi/3}$ son $\sqrt{4}_{(\pi/3+2k\pi)/2}$ para k = 0, 1, es decir, $2_{\pi/6}$ y $2_{7\pi/6}$.

b) Las raíces cúbicas de $8i$ se pueden calcular de forma sencilla mediante la forma polar del número complejo.

Representando en el plano el número $8i$ se deduce que su módulo 8 y que su argumento es $\frac{\pi}{2}$, de donde la forma polar es $8_{\pi/2}$.

Las raíces cúbicas de $8_{\pi/2}$ son $\sqrt[3]{8}_{(\pi/2+2k\pi)/3}$ para k = 0, 1, 2 es decir, $2_{\pi/6}$, $2_{5\pi/6}$ y $2_{3\pi/2}$.

La forma binómica de cada una de las tres raíces es:

$$2_{\pi/6} = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i$$

$$2_{5\pi/6} = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\,\text{sen}\frac{5\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} + i$$

$$2_{3\pi/2} = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\,\text{sen}\frac{3\pi}{2}\right) = 2\,(0+i(-1)) = -2i$$