FORMA POLAR Y FORMA TRIGONOMÉTRICA

La forma en que hasta este momento se han representado los números complejos se llama **forma binómica**; sin embargo, no es la única posible. Así, el número complejo $a+bi$ se puede escribir de otras dos formas que facilitan la realización de ciertas operaciones. Para ello, previamente se han de definir los conceptos de módulo y argumento de un número complejo.

El **módulo** o **valor absoluto** del número complejo $a+bi$ es la distancia del origen de coordenadas al punto (a, b) que representa al número complejo $a+bi$. Se denota $|a+bi|$.

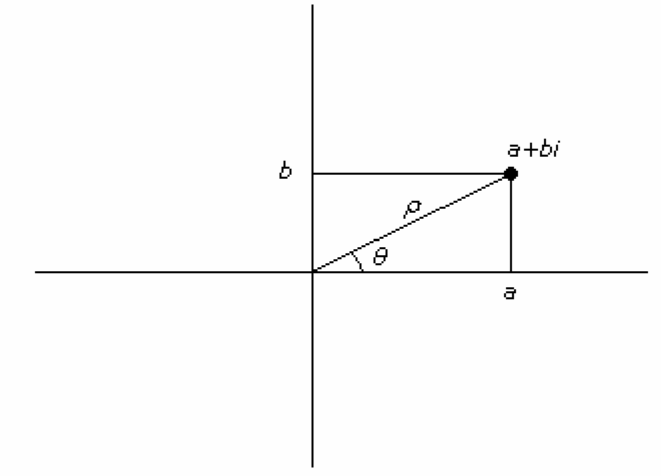
Aplicando el Teorema de Pitágoras, se obtiene que $|a+bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

El **argumento** de un número complejo $a+bi$ no nulo es el ángulo que forma el eje OX positivo con el vector que une el origen de coordenadas con el punto (a, b). Se denota $\arg(a+bi)$.

Aplicando trigonometría, se comprueba que $\arg(a+bi) = \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)$. (Ver Unidad Didáctica 3)

En esta Unidad Didáctica se considera que $0 \le \arg(a+bi) < 2\pi$, aunque es igualmente válido considerar que el argumento está en cualquier otro intervalo de longitud 2π, por ejemplo, que se ha de verificar, $-\pi < \arg(a+bi) \le \pi$.

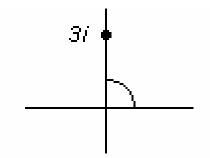
En la siguiente figura se muestran gráficamente el módulo y el argumento de un número complejo $a+bi$, que también es habitual denotarlos por ρ y θ, respectivamente.



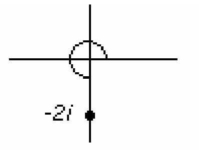
siendo $\rho = |a+bi|$ y $\theta = \arg(a+bi)$

Ejemplo 10:

a) El modulo de $3i$ es 3 y el argumento es $\frac{\pi}{2}$ como se observa en la figura.



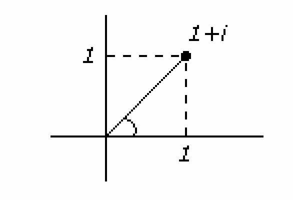
b) El módulo de $-2i$ es $|-2i| = 2$ y el argumento es $\arg(-2i) = \frac{3\pi}{2}$ como se observa en la figura.

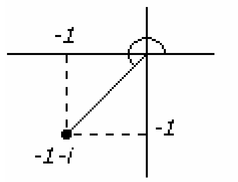


c) El módulo de $1+i$ es $|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ y el argumento es $\arg(1+i) = \text{arctg}\frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}$

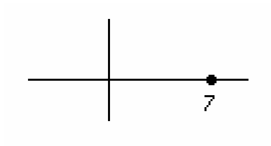
El módulo de $-1-i$ es $|-1-i| = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$ y el argumento es $\arg(-1-i) = \text{arctg}\frac{-1}{-1} = \frac{5\pi}{4}$

Observar que los argumentos de los dos números complejos son iguales a arctg1, aunque toman diferente valor dependiendo del cuadrante en que se esté, como se observa en las siguientes figuras.





d) El módulo de 7 es $|7| = \sqrt{(7)^2} = \sqrt{49} = 7$ y el argumento es $\arg(7) = \text{arctg}\frac{0}{7} = 0$



La **forma polar** de escribir el número complejo $a+bi$ es ρ_θ siendo ρ el módulo y θ el argumento de $a+bi$.

Ejemplo 11:

La forma polar de cada uno de los números complejos del ejemplo 10 es:

a) $3i = 3_{\pi/2}$

b) $-2i = 2_{3\pi/2}$

c) $1+i = \sqrt{2}_{\pi/4}$ $\qquad$ $-1-i = \sqrt{2}_{5\pi/4}$

d) $7 = 7_0$

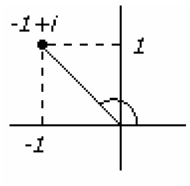
Aplicando conceptos de trigonometría (Unidad Didáctica 3), es inmediato deducir que dado un número complejo $a+bi$, su módulo ρ y su argumento θ el argumento, se cumple que $a = \rho\cos\theta$ y $b = \rho\,\text{sen}\theta$, de donde surge la forma trigonomética de escribir un número complejo.

La **forma trigonométrica** de escribir el número complejo $a+bi$ es $\rho(\cos\theta + i\,\text{sen}\theta)$ siendo ρ el módulo y θ el argumento de $a+bi$.

Ejemplo 12:

a) Se calcula a continuación la forma polar y la forma trigonométrica del número complejo $-1+i$.

Para ello es necesario calcular su módulo y su argumento:



$$\rho = |-1+i| = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}$$

$$\theta = \arg(-1+i) = \operatorname{arctg}\frac{1}{-1} = \frac{3\pi}{4}$$

Por tanto, la forma polar es $\sqrt{2}_{3\pi/4}$ y la forma trigonométrica $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{3\pi}{4}\right)$.

b) Se calcula a continuación la forma binómica y la forma trigonométrica del número complejo 2_π.

Al estar dado en forma polar, es claro que su módulo es 2 y su argumento es π, por tanto, la forma trigonométrica es $2(\cos\pi + i\,\text{sen}\pi)$ y operando se obtiene la forma binómica $2(\cos\pi + i\,\text{sen}\pi) = 2(-1+i0) = -2$.

c) La forma binómica del número complejo $\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\,\text{sen}\frac{\pi}{2}\right)$ se obtiene sin más que hacer cuentas:

$$\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\,\text{sen}\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{3}\,(0+i1) = \sqrt{3}\,i$$

La forma polar es inmediata teniendo en cuenta que el módulo es $\sqrt{3}$ y el argumento es $\frac{\pi}{2}$, así el número complejo en forma polar es $\sqrt{3}_{\pi/2}$.

Operaciones en forma polar y en forma trigonométrica

Las formas polar y trigonométrica permiten que la realización de determinadas operaciones de números complejos se simplifiquen.

Así, dados dos números complejos $\rho_\theta = \rho(\cos\theta + i\,\text{sen}\theta)$ y $\omega_\alpha = \omega(\cos\alpha + i\,\text{sen}\alpha)$ se tiene:

1. El producto de dos números complejos tiene por módulo el producto de los módulos y por argumento la suma de los argumentos.

   En forma polar: $\rho_\theta . \omega_\alpha = (\rho.\omega)_{\theta+\alpha}$

   En forma trigonométrica: $\rho(\cos\theta + i\,\text{sen}\theta).\omega(\cos\alpha + i\,\text{sen}\alpha) = (\rho.\omega)\big(\cos(\theta+\alpha) + i\,\text{sen}(\theta+\alpha)\big)$

2. El cociente de dos números complejos, siendo el denominador no nulo, tiene por módulo el cociente de los módulos y por argumento la resta de los argumentos.

   En forma polar: $\dfrac{\rho_\theta}{\omega_\alpha} = \left(\dfrac{\rho}{\omega}\right)_{\theta-\alpha}$

   En forma trigonométrica: $\dfrac{\rho(\cos\theta + i\,\text{sen}\theta)}{\omega(\cos\alpha + i\,\text{sen}\alpha)} = \dfrac{\rho}{\omega}\big(\cos(\theta-\alpha) + i\,\text{sen}(\theta-\alpha)\big)$

3. La potencia *n*-ésima de un número complejo tiene por módulo la potencia *n*-ésima del módulo y por argumento *n* veces el argumento.

   En forma polar: $(\rho_\theta)^n = (\rho^n)_{n\theta}$

   En forma trigonométrica: $\big(\cos\theta + i\,\text{sen}\theta\big)^n = \rho^n\big(\cos(n\theta) + i\,\text{sen}(n\theta)\big)$

Ejemplo 13:

a) $\sqrt{3}_{\pi/4} \cdot 2_{\pi/3} = (\sqrt{3}.2)_{\pi/4+\pi/3} = (2\sqrt{3})_{7\pi/12}$; $\quad \dfrac{2_{\pi/3}}{\sqrt{3}_{\pi/4}} = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)_{\pi/3-\pi/4} = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)_{\pi/12}$; $\quad \left(2_{\pi/3}\right)^3 = (2^3)_{3\pi/3} = 8_\pi$

b) Para calcular el producto (2-2*i*).(1+*i*), los números complejos se pueden expresar en forma polar, realizar el producto y, finalmente expresar el resultado en forma binómica.

El módulo de 2-2*i* es $\rho = |2-2i| = \sqrt{(2)^2+(-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ y el argumento es $\theta = \arg(2-2i) = \text{arctg}\dfrac{-2}{2} = \dfrac{7\pi}{4}$. Por tanto, la forma polar es $(2\sqrt{2})_{7\pi/4}$.

Análogamente, el módulo de 1+*i* es $\omega = |1+i| = \sqrt{(1)^2+(1)^2} = \sqrt{2}$ y el argumento es $\alpha = \arg(1+i) = \text{arctg}\dfrac{1}{1} = \dfrac{\pi}{4}$. Por tanto, la forma polar es $\sqrt{2}_{\pi/4}$.

El producto en forma polar es $(2\sqrt{2})_{7\pi/4} \cdot \sqrt{2}_{\pi/4} = (2\sqrt{2}\sqrt{2})_{7\pi/4+\pi/4} = 4_{8\pi/4} = 4_{2\pi} = 4_0$.

Finalmente, la forma binómica del producto es 4(cos0+*i*sen0) = 4.

Otra operación que se simplifica al expresar un número complejo en forma polar es el cálculo de sus raíces *n*-ésimas. Las **raíces *n*-ésimas** de un número complejo cuya forma polar es ρ_θ son:

$$\sqrt[n]{\rho}_{(\theta+2k\pi)/n} \quad \text{para } k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Ejemplo 14:

a) Las raíces cuadradas de $4_{\pi/3}$ son $\sqrt{4}_{(\pi/3+2k\pi)/2}$ para $k = 0, 1$, es decir, $2_{\pi/6}$ y $2_{7\pi/6}$.

b) Las raíces cúbicas de 8*i* se pueden calcular de forma sencilla mediante la forma polar del número complejo.

Representando en el plano el número 8*i* se deduce que su módulo 8 y que su argumento es $\dfrac{\pi}{2}$, de donde la forma polar es $8_{\pi/2}$.

Las raíces cúbicas de $8_{\pi/2}$ son $\sqrt[3]{8}_{(\pi/2+2k\pi)/3}$ para $k = 0, 1, 2$ es decir, $2_{\pi/6}$, $2_{5\pi/6}$ y $2_{3\pi/2}$.

La forma binómica de cada una de las tres raíces es:

$$2_{\pi/6} = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}+i$$

$$2_{5\pi/6} = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\,\text{sen}\frac{5\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3}+i$$

$$2_{3\pi/2} = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\,\text{sen}\frac{3\pi}{2}\right) = 2\,(0+i(-1)) = -2i$$