Autoras: Gloria Jarne, Esperanza Minguillón, Trinidad Zabal

OPERACIONES

Suma de números complejos

Dados dos números complejos se define su suma como otro número complejo cuya parte real es la suma de las partes reales y cuya parte imaginaria es la suma de las partes imaginarias.

$$(a+bi) + (c+di) = (a+c)+(b+d)i$$

Ejemplo 4:

a) $(3-2i) + (4+5i) = (3+4)+(-2+5)i = 7+3i$

b) En la práctica es habitual no poner cada sumando entre paréntesis. Así, para sumar $4+\frac{1}{3}i$ y $\frac{3}{2}+\frac{2}{3}i$ se procede como sigue:

$$4+\frac{1}{3}i + \frac{3}{2}+\frac{2}{3}i = 4+\frac{3}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)i = \frac{11}{2}+1i = \frac{11}{2}+i$$

Propiedades

1. *Asociativa*: $[(a+bi) + (c+di)] + (e+fi) = (a+bi) + [(c+di) + (e+fi)]$
2. *Elemento neutro*: es el número $0 = 0+0i$, ya que se cumple $(a+bi) + 0 = 0 + (a+bi) = a+bi$
3. *Elemento simétrico*: Dado $a+bi$ su elemento simétrico, llamado *opuesto*, es $-(a+bi) = -a-bi$, ya que se cumple $(a+bi) + (-a-bi) = (-a-bi) + (a+bi) = 0$
4. *Conmutativa*: $(a+bi) + (c+di) = (c+di) + (a+bi)$

Con estas propiedades se puede decir que el conjunto de los números complejos con la operación suma es un **grupo conmutativo**.

El hecho de que dado cualquier número complejo exista su elemento opuesto permite definir la **resta** en C de la forma:

$$(a+bi) - (c+di) = (a+bi) + (-(c+di)) = (a+bi) + (-c-di)) = (a-c)+(b-d)i$$

que es una operación interna.

Producto de números complejos

Dados dos números complejos $a+bi$ y $c+di$ su producto es otro número complejo de la forma

$$(a+bi).(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$$

Ejemplo 5: $(3-2i).(4+7i) = (3.4-(-2)7) + (3.7+(-2)4)i = 26+13i$

Propiedades

1. *Asociativa*: $[(a+bi).(c+di)].(e+fi) = (a+bi).[(c+di).(e+fi)]$
2. *Elemento neutro*: es el número $1 = 1+0i$, ya que se cumple $(a+bi).1 = 1.(a+bi) = a+bi$
3. *Elemento simétrico*: Dado $a+bi \neq 0$, su elemento simétrico, llamado *inverso*, es $(a+bi)^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$, ya que se cumple $(a+bi).\left(\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i\right) = \left(\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i\right).(a+bi) = 1$

4. *Conmutativa*: $(a+bi).(c+di) = (c+di).(a+bi)$
5. *Distributiva respecto de la suma*:

$$(a+bi).[(c+di) + (e+fi)] = [(a+bi).(c+di)] + [(a+bi).(e+fi)]$$

Con estas propiedades y las enumeradas para la suma se puede decir que el conjunto de los números complejos con las operaciones suma y producto es un **cuerpo conmutativo**.

En la práctica, el producto de dos números complejos se obtiene multiplicando las expresiones $a+bi$ y $c+di$ utilizando la propiedad distributiva y teniendo en cuenta que $i^2 = -1$:

$$(a+bi).(c+di) = ac+adi+bic+bdi^2 = ac+adi+bci-bd = (ac-bd) + (ad+bc)i$$

Ejemplo 6:

a) $(3+i).4i = 12i + 4i^2 = 12i - 4 = -4 + 12i$

b) $\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{5}i\right).(2+10i) = \frac{2}{3} + \frac{10}{3}i + \frac{4}{5}i + \frac{20}{5}i^2 = \frac{2}{3} - 4 + \left(\frac{10}{3}+\frac{4}{5}\right)i = \frac{-10}{3} + \frac{62}{15}i$

Ejemplo 7:

a) El elemento inverso de $5+7i$ es $\frac{5}{5^2+7^2} - \frac{7}{5^2+7^2}i = \frac{5}{74} - \frac{7}{74}i$

b) El elemento inverso de $\sqrt{3}i$ es $\frac{-\sqrt{3}}{3}i$

El hecho de que dado cualquier número complejo no nulo exista su elemento inverso permite definir la **división** en *C* como:

$$(a+bi):(c+di) = (a+bi).(c+di)^{-1} = (a+bi).\left(\frac{c}{c^2+d^2} - \frac{d}{c^2+d^2}i\right) = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i, \quad \text{si } c+di \neq 0$$

En la practica, para calcular $(a+bi):(c+di) = \frac{a+bi}{c+di}$, basta multiplicar el numerador y el denominador por el conjugado del denominador y realizar operaciones:

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(ac+bd)+(-ad+bc)\,i}{(c^2+d^2)+(-cd+dc)\,i} = \frac{(ac+bd)+(-ad+bc)\,i}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

Este mismo proceso se puede utilizar para calcular el inverso de un número complejo no nulo, escribiéndolo de la forma $(a+bi)^{-1} = \frac{1}{a+bi}$ y realizando la división.

Ejemplo 8:

a) $(11+10i):(1+4i) = \frac{11+10i}{1+4i} = \frac{(11+10i)(1-4i)}{(1+4i)(1-4i)} = \frac{11-44i+10i-40i^2}{1-16i^2} = \frac{51-34i}{17} = 3-2i$

b) $(-3+7i)^{-1} = \frac{1}{-3+7i} = \frac{1(-3-7i)}{(-3+7i)(-3-7i)} = \frac{-3-7i}{9-49i^2} = \frac{-3-7i}{58} = \frac{-3}{58} - \frac{7}{58}i$

Las siguientes propiedades relacionan las operaciones anteriores con el cálculo del conjugado de un número complejo.

Propiedades

1. $\overline{k(a+bi)} = k\ \overline{a+bi}$, siendo $k \in \mathbb{R}$
2. $\overline{(a+bi)+(c+di)} = \overline{a+bi} + \overline{c+di}$
3. $\overline{-(a+bi)} = -\ \overline{a+bi}$
4. $\overline{(a+bi).(c+di)} = \overline{a+bi}\ .\ \overline{c+di}$
5. $\overline{(a+bi)^{-1}} = \left(\overline{a+bi}\right)^{-1}$
6. $\overline{(a+bi):(c+di)} = \overline{a+bi} : \overline{c+di}$