CONCEPTOS

En el conjunto de los números reales, una ecuación tan sencilla como $x^2 + 1 = 0$ no se puede resolver ya que es equivalente a $x^2 = -1$ y no existe ningún número real cuyo cuadrado sea negativo. Así, para resolver este tipo de ecuaciones, es necesario construir un conjunto de números que contenga a los reales y en el que se puedan calcular las raíces cuadradas y, en general, de índice par de números negativos.

Un **número complejo** es un número de la forma $a+bi$, donde a y b son números reales, llamados **parte real** y **parte imaginaria** respectivamente, e i es la **unidad imaginaria** que se define como $i = \sqrt{-1}$.

El **conjunto de números complejos** es $C = \{a+bi \mid a, b \in R\}$.

Los números complejos con parte imaginaria no nula, es decir de la forma $a+bi$ con $b \neq 0$, se llaman **números imaginarios** y si además la parte real es nula, es decir son de la forma bi, se llaman **números imaginarios puros**. Si la parte imaginaria del número complejo $a+bi$ es nula, entonces se tiene el número real $a+0i = a$, de donde se deduce que $R \subset C$.

Se dice que dos números complejos son **iguales** si lo son sus partes reales y sus partes imaginarias. Es decir, $a+bi = c+di$ si se verifica $a = c$ y $b = d$.

Ejemplo 1:

a) $\sqrt{3}-4i$ es un número complejo con parte real $\sqrt{3}$ y parte imaginaria -4.

b) El número real -2 se puede considerar como un número complejo con parte real -2 y parte imaginaria 0, ya que se puede escribir $-2 = -2+0i$.

c) $\frac{2}{7}i$ es un número complejo con parte real 0 y parte imaginaria $\frac{2}{7}$, por tanto, es un número imaginario puro.

Dado un número complejo, $a+bi$, su **conjugado** es otro número complejo que tiene la misma parte real y la parte imaginaria de signo contrario. Se representa $\overline{a+bi} = a-bi$.

Ejemplo 2: $\overline{3+4i} = 3-4i$, $\overline{\frac{4}{3}-i} = \frac{4}{3}+i$, $\overline{5} = 5$, $\overline{2i} = -2i$

Se verifica que el conjugado del conjugado de un número complejo es el mismo número, es decir, $\overline{\overline{a+bi}} = a+bi$.

Algunas ecuaciones que no se pueden resolver en el conjunto de los números reales, tienen solución en el conjunto C. En general, se verifica que toda ecuación polinómica con coeficientes reales de grado n tiene n soluciones en el conjunto de los números complejos, pudiendo ser éstas números reales o imaginarios. Además, si tiene como solución un número imaginario, también es solución el conjugado de éste.

Ejemplo 3:

a) La ecuación $x^2 + 9 = 0$ es equivalente a $x^2 = -9$, por tanto, no tiene solución en R. Sin embargo, sí la tiene en C ya que en este conjunto se pueden realizar las siguientes operaciones:

$$x = \pm\sqrt{-9} = \pm\sqrt{9}\sqrt{-1} = \pm 3i$$

Por tanto, en el conjunto de los números complejos la ecuación tiene dos soluciones que son $x = -3i$ y $x = 3i$ y se observa que son números complejos conjugados entre sí.

b) La ecuación $x^2 - 4x + 5 = 0$ no tiene solución en R, ya que aplicando la fórmula de resolución de ecuaciones polinómicas de segundo grado se tiene $x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4.1.5}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2}$ y se concluye que no existe solución real ya que el discriminante es negativo. Sin embargo, si la ecuación se resuelve en el conjunto de los números complejos tiene dos soluciones que son $x = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}\sqrt{-1}}{2} = \frac{4 \pm 2i}{2} = \begin{cases} 2+i \\ 2-i \end{cases}$

Por tanto, las soluciones en C son $x = 2+i$ y $x = 2-i$, que son dos números imaginarios conjugados entre sí.

c) La ecuación $x^3 - x^2 + 16x - 16 = 0$ tiene una solución real que es $x = 1$. Aplicando la Regla de Ruffini se obtiene:

$$x^3 - x^2 + 16x - 16 = (x-1)(x^2 + 16)$$

Como la ecuación $x^2 + 16 = 0$ no tiene solución en R, se concluye que $x = 1$ es la única solución real de la ecuación inicial.

Sin embargo, en C tiene otras dos soluciones, ya que en este conjunto se tiene:

$$x^2 + 16 = 0 \iff x^2 = -16 \iff x = \pm\sqrt{-16} = \pm\sqrt{16}\sqrt{-1} = \begin{cases} 4i \\ -4i \end{cases}$$

Por tanto, las soluciones de la ecuación inicial en C son $x = 1$, $x = 4i$ y $x = -4i$, siendo las dos últimas dos números complejos conjugados entre sí.