9. Dados los números complejos $z_1 = 2\text{-}i$, $z_2 = 4_{\pi}$, $z_3 = 3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\ \text{sen}\frac{\pi}{4}\right)$ y $z_4 = 1\text{-}\sqrt{3}\,i$, realizar las operaciones que se indican a continuación expresando los resultados en forma binómica:

a) $z_1\, z_2$ **b)** $z_1 + z_3$ **c)** $z_4^{\,3}$ **d)** $z_1 z_3$

e) $\dfrac{z_2}{z_3}$ **f)** $\sqrt{z_2}$ **g)** $z_2^{\,4}$ **h)** $\sqrt[3]{z_3}$

Solución

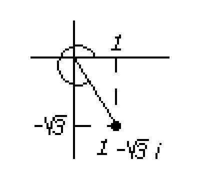
En este ejercicio hay que tener en cuenta que para realizar una operación entre dos números complejos, ambos deben estar escritos de la misma forma: binómica, polar o trigonométrica.

a) Expresando z_2 en forma binómica se tiene $z_2 = 4_{\pi} = 4(\cos\pi + i\text{sen}\pi) = 4(-1+i0) = -4$, y multiplicando este resultado por z_1 se obtiene $z_1\, z_2 = (2\text{-}i)(-4) = -8+4i$.

b) Expresando z_3 en forma binómica queda $z_3 = 3\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\text{sen}\frac{\pi}{4}\right) = 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}i$, y sumando este resultado con z_1 se obtiene $z_1 + z_3 = 2 - i + \frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}i = \frac{4+3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}-2}{2}i$.

c) El cálculo de potencias de un número complejo se simplifica si éste se expresa en forma polar o trigonométrica.

Para calcular la expresión polar de $z_4 = 1\text{-}\sqrt{3}\,i$ es necesario calcular su módulo y su argumento:



$$|1\text{-}\sqrt{3}\,i\,| = \sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\arg(1\text{-}\sqrt{3}\,i) = \text{arctg}\frac{-\sqrt{3}}{1} = \frac{5\pi}{3}$$

y así la forma polar de $1\text{-}\sqrt{3}\,i$ es $2_{5\pi/3}$

Por tanto, $z_4^{\,3} = \left(2_{5\pi/3}\right)^3 = 2^3_{\;3.5\pi/3} = 8_{5\pi} = 8_{\pi}$

Y la expresión binómica del resultado es $z_4^{\,3} = 8_{\pi} = 8(\cos\pi+i\text{sen}\pi) = 8(-1+0i) = -8$

d) La forma binómica de z_3, obtenida en el apartado b), es $z_3 = \frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}i$, y multiplicando este resultado por z_1 se obtiene:

$$z_1 z_3 = (2\text{-}i)\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}i\right) = 3\sqrt{2}+3\sqrt{2}\,i - \frac{3\sqrt{2}}{2}i - \frac{3\sqrt{2}}{2}i^2 = \frac{9\sqrt{2}}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}\,i$$

e) En este caso resulta más sencillo calcular el cociente en forma polar, para lo que se deben expresar numerador y denominador en dicha forma:

$z_2 = 4_{\pi}$

$z_3 = 3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\ \text{sen}\frac{\pi}{4}\right) = 3_{\pi/4}$

y realizando la división queda $\frac{z_2}{z_3} = \frac{4_\pi}{3_{\pi/4}} = \left(\frac{4}{3}\right)_{\pi-\pi/4} = \left(\frac{4}{3}\right)_{3\pi/4}$

Expresando el resultado en forma binómica queda:

$$\frac{z_2}{z_3} = \left(\frac{4}{3}\right)_{3\pi/4} = \frac{4}{3}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{4}{3}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{-2\sqrt{2}}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3}i$$

f) Al estar z_2 expresado en forma polar, sus raíces cuadradas se pueden calcular de forma sencilla.

Las raíces cuadradas de $z_2 = 4_\pi$ son:

$$\sqrt{4}_{(\pi+2k\pi)/2} \text{ para } k = 0,\ 1 \text{ es decir, } 2_{\pi/2} \text{ y } 2_{3\pi/2}$$

La forma binómica de cada una de las dos raíces es:

$$2_{\pi/2} = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{2}\right) = 2(0+i1) = 2i$$

$$2_{3\pi/2} = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\,\text{sen}\frac{3\pi}{2}\right) = 2(0+i(-1)) = -2i$$

Notar que en este caso al ser $z_2 = 4_\pi = -4$, un número real, su raíz cuadrada se puede calcular como sigue:

$$\sqrt{z_2} = \sqrt{-4} = \pm\sqrt{4}\,\sqrt{-1} = \pm 2i.$$

g) Al estar z_2 expresado en forma polar, el cálculo de su cuarta potencia es inmediato,

$$z_2^4 = (4_\pi)^4 = 4^4{}_{4\pi} = 256_0$$

que expresado en forma binómica es $z_2^4 = 256_0 = 256(\cos 0 + i\,\text{sen} 0) = 256(1+i0) = 256$

Como en el apartado anterior, notar que al ser $z_2 = 4_\pi = -4$, un número real, su potencia cuarta se puede calcular como sigue:

$$z_2^4 = (-4)^4 = 256$$

h) Como $z_3 = 3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{4}\right)$ tiene por expresión polar $z_3 = 3_{\pi/4}$, sus raíces cúbicas son:

$$\sqrt[3]{3}_{(\pi/4+2k\pi)/3} \text{ para } k = 0,\ 1,\ 2 \text{ es decir, } \sqrt[3]{3}_{\pi/12},\ \sqrt[3]{3}_{9\pi/12} \text{ y } \sqrt[3]{3}_{17\pi/12}$$

La forma binómica de cada una de las tres raíces es:

$$\sqrt[3]{3}_{\pi/8} = \sqrt[3]{3}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt[3]{3}\cos\frac{\pi}{12} + i\sqrt[3]{3}\,\text{sen}\frac{\pi}{12}$$

$$\sqrt[3]{3}_{9\pi/8} = \sqrt[3]{3}\left(\cos\frac{9\pi}{12} + i\,\text{sen}\frac{9\pi}{12}\right) = \sqrt[3]{3}\cos\frac{9\pi}{12} + i\sqrt[3]{3}\,\text{sen}\frac{9\pi}{12}$$

$$\sqrt[3]{3}_{17\pi/8} = \sqrt[3]{3}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\,\text{sen}\frac{17\pi}{12}\right) = \sqrt[3]{3}\cos\frac{17\pi}{12} + i\sqrt[3]{3}\,\text{sen}\frac{17\pi}{12}$$