

6. Resolver en \mathbf{R} y en \mathbf{C} las siguientes ecuaciones:

a) $x^4 + 3x^2 - 10 = 0$

b) $x^3 + 5x^2 + 6x = 0$

c) $x^4 + 2x^2 + 1 = 0$

Solución

a) $x^4 + 3x^2 - 10 = 0$ es una ecuación bicuadrada, por lo que haciendo $t = x^2$ se obtiene la ecuación polinómica de segundo grado, $t^2 + 3t - 10 = 0$, cuyas soluciones son:

$$t = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-3 \pm 7}{2} = \begin{cases} -5 \\ 2 \end{cases}$$

- Considerando la solución $t = -5$, se obtiene $x^2 = -5$, de donde $x = \pm \sqrt{-5} = \pm \sqrt{5} \sqrt{-1} = \pm \sqrt{5} i$
- Considerando la solución $t = 2$, se obtiene $x^2 = 2$, de donde $x = \pm \sqrt{2}$

Por tanto, las soluciones en \mathbf{R} son $x = \sqrt{2}$ y $x = -\sqrt{2}$ y las soluciones en \mathbf{C} son, además de las dos anteriores, $x = \sqrt{5} i$ y $x = -\sqrt{5} i$.

b) Factorizando el polinomio, la ecuación $x^3 + 5x^2 + 6x = 0$ queda $x(x^2 + 5x + 6) = 0$, y teniendo en cuenta que para que el producto de dos factores sea 0 basta que lo sea uno de ellos, se obtiene que o bien $x = 0$ o bien $x^2 + 5x + 6 = 0$, de donde, $x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2} = \begin{cases} -3 \\ -2 \end{cases}$

Por tanto, las soluciones tanto en \mathbf{R} como en \mathbf{C} son $x = 0$, $x = -2$ y $x = -3$.

c) $x^4 + 2x^2 + 1 = 0$ es una ecuación bicuadrada, por lo que haciendo $t = x^2$ se obtiene la ecuación polinómica de segundo grado, $t^2 + 2t + 1 = 0$, que se puede escribir de la forma, $(t+1)^2 = 0$, cuya solución es $t = -1$, doble.

Considerando la solución $t = -1$, se obtiene $x^2 = -1$, de donde $x = \pm \sqrt{-1} = \pm i$

Por tanto, la ecuación no tiene soluciones en \mathbf{R} y las soluciones en \mathbf{C} son $x = i$ y $x = -i$, dobles.