Autoras: Gloria Jarne, Esperanza Minguillón, Trinidad Zabal

2. Dados los números complejos $z_1 = 2\text{-}i$ y $z_2 = 3+6i$, determinar el número x que verifica cada una de las siguientes igualdades:

a) $z_1 + x = z_2$ **b)** $z_1^2\, x = 1$ **c)** $z_1 + z_2 + x = 1$ **d)** $z_2^2 + x = -z_1^2$ **e)** $z_2\, x = z_1$

Solución

a) Despejando x se tiene $x = z_2 - z_1 = 3+6i - (2-i) = 3-2+(6+1)i = 1+7i$

b) Despejando x se tiene $x = \dfrac{1}{z_1^2}$ que existe al ser z_1^2 no nulo.

Aplicando la fórmula del cuadrado de una diferencia, se tiene:

$$z_1^2 = (2-i)^2 = 4 - 4i + i^2 = 4 - 4i - 1 = 3-4i$$

y calculando el inverso del resultado anterior queda

$$x = \frac{1}{z_1^2} = \frac{1}{3-4i} = \frac{1(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{3+4i}{9-16i^2} = \frac{3+4i}{9+16} = \frac{3+4i}{25} = \frac{3}{25} + \frac{4}{25}i$$

c) Despejando x se tiene $x = 1 - z_1 - z_2 = 1 - (2-i) - (3+6i) = 1 - 2 - 3 + (1-6)i = -4-5i$

d) Despejando x se tiene $x = -z_1^2 - z_2^2$. Calculando el cuadrado de z_1 y z_2 se tiene:

$$z_1^2 = (2-i)^2 = 4 - 4i + i^2 = 4 - 4i - 1 = 3-4i$$

$$z_2^2 = (3+6i)^2 = 9 + 36i + 36i^2 = 9 + 36i - 36 = -27+36i$$

Así, $x = -z_1^2 - z_2^2 = -(3-4i) - (-27+36i) = -3 + 4i + 27 - 36i = 24-32i$

e) Al ser z_2 no nulo, se puede despejar x obteniéndose $x = \dfrac{z_1}{z_2}$. Para calcular este cociente se multiplica el numerador y el denominador por el conjugado del denominador:

$$x = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2-i}{3+6i} = \frac{(2-i)(3-6i)}{(3+6i)(3-6i)} = \frac{6-12i-3i+6i^2}{9-36i^2} = \frac{6-15i-6}{9+36} = \frac{-15i}{45} = \frac{-1}{3}i$$