Autoras: Gloria Jarne, Esperanza Minguillón, Trinidad Zabal

1. Dados $z_1 = -3+4i$, $z_2 = 5-2i$, $z_3 = \frac{3}{2}$ y $z_4 = 7i$, calcular:

a) $(z_1 - z_2)\, z_3$ **b)** $z_1 z_4 + z_3 z_4$ **c)** $\overline{z_1 + z_4 - 5z_2}$ **d)** $z_1 + z_3^{-1}$ **e)** z_2^{-1}

f) $\overline{\overline{z_1 z_2}}$ **g)** $\left(\overline{z_1 + z_2}\right)^{-1}$ **h)** $z_1^2 z_3$ **i)** $\frac{z_2}{z_1}$ **j)** $\frac{z_1}{2z_3 + z_4}$

Solución

a) Para calcular $(z_1 - z_2)\, z_3$, en primer lugar se calcula la operación del paréntesis y a continuación se multiplica el resultado por z_3:

$$(z_1 - z_2)\, z_3 = \big(-3+4i - (5-2i)\big)\frac{3}{2} = \big(-3-5+(4+2)i\big)\frac{3}{2} = (-8+6i)\frac{3}{2} = -12+9i$$

b) En primer lugar se calculan $z_1 z_4$ y $z_3 z_4$ para después sumar los resultados:

$$z_1 z_4 = (-3+4i)\, 7i = -21i+28i^2 = -28-21i$$

$$z_3 z_4 = \frac{3}{2}\, 7i = \frac{21}{2} i$$

$$z_1 z_4 + z_3 z_4 = -28-21i + \frac{21}{2} i = -28 - \frac{21}{2} i$$

Notar que otra forma de obtener este resultado es sacar factor común z_4 quedando:

$$z_1 z_4 + z_3 z_4 = (z_1 + z_3)\, z_4 = \left(-3 + 4i + \frac{3}{2}\right)7i = \left(\frac{-3}{2} + 4i\right)7i = \frac{-21}{2} i + 28i^2 = -28 - \frac{21}{2} i$$

c) En primer lugar se calcula la operación $z_1 + z_4 - 5z_2 = -3+4i + 7i - 5(5-2i) = -28+21i$ y después se calcula su conjugado, $\overline{z_1 + z_4 - 5z_2} = -28-21i$

d) El inverso de z_3 es $z_3^{-1} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$ y, por tanto, $z_1 + z_3^{-1} = -3+4i + \frac{2}{3} = \frac{-7}{3}+4i$

e) Para calcular el inverso de $z_2 = 5-2i$ se puede proceder de dos formas:

- mediante la definición: $z_2^{-1} = \frac{5}{5^2+(-2)^2} - \frac{-2}{5^2+(-2)^2} i = \frac{5}{29} + \frac{2}{29} i$

- escribiéndolo como un cociente y efectuando la división multiplicando el numerador y el denominador por el conjugado del denominador:

$$z_2^{-1} = \frac{1}{z_2} = \frac{1}{5-2i} = \frac{1(5+2i)}{(5-2i)(5+2i)} = \frac{5+2i}{25-4i^2} = \frac{5+2i}{29} = \frac{5}{29} + \frac{2}{29} i$$

f) Teniendo en cuenta que el conjugado del conjugado de un número es el propio número, es decir, $\overline{\overline{z_1 z_2}} = z_1 z_2$, se tiene $\overline{\overline{z_1 z_2}} = z_1 z_2 = (-3+4i)(5-2i) = -15+6i+20i-8i^2 = -7+26i$

g) En primer lugar, se realiza la suma de z_1 y z_2, después se calcula el conjugado de este resultado y finalmente el inverso de éste último:

$$z_1 + z_2 = -3+4i + 5-2i = -3+5+(4-2)i = 2+2i$$

$$\overline{z_1 + z_2} = 2\text{-}2i$$

$$\left(\overline{z_1 + z_2}\right)^{-1} = \frac{1}{2\text{-}2i} = \frac{1(2+2i)}{(2\text{-}2i)(\,2+2i)} = \frac{2+2i}{4\text{-}4i^2} = \frac{2+2i}{8} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$$

Observar que se podría haber invertido el orden de realización de las dos últimas operaciones ya que se verifica $\left(\overline{a + bi}\right)^{-1} = \overline{(a+bi)^{-1}}$

h) $z_1^{\,2} z_3 = (\text{-}3+4i)^2 \dfrac{3}{2} = (9\text{-}24i+16i^2)\dfrac{3}{2} = (9\text{-}24i\text{-}16)\dfrac{3}{2} = (\text{-}7\text{-}24i)\dfrac{3}{2} = \dfrac{\text{-}21}{2}\text{-}\,36i$

i) Se efectúa el cociente multiplicando numerador y denominador por el conjugado del denominador:

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{5\text{-}2i}{\text{-}3+4i} = \frac{(5\text{-}2i)(\text{-}3\text{-}4i)}{(\text{-}3+4i)(\text{-}3\text{-}4i)} = \frac{\text{-}15\text{-}20i+6i+8i^2}{9\text{-}16i^2} = \frac{\text{-}15\text{-}14i\text{-}8}{9+16} = \frac{\text{-}23\text{-}14i}{25} = \frac{\text{-}23}{25}\text{-}\frac{14}{25}i$$

j) En primer lugar se calcula el denominador

$$2z_3 + z_4 = 2\frac{3}{2} + 7i = 3+7i$$

y, multiplicando numerador y denominador por el conjugado del denominador, el cociente queda:

$$\frac{z_1}{2z_3 + z_4} = \frac{\text{-}3+4i}{3+7i} = \frac{(\text{-}3+4i)(3\text{-}7i)}{(3+7i)(3\text{-}7i)} = \frac{\text{-}9+21i+12i\text{-}28i^2}{9\text{-}49i^2} = \frac{\text{-}9+33i+28}{9+49} = \frac{19+33i}{58} = \frac{19}{58} + \frac{33}{58}i$$