

Suma de números complejos

Dados dos números complejos se define su suma como otro número complejo cuya parte real es la suma de las partes reales y cuya parte imaginaria es la suma de las partes imaginarias.

$$(a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$$

Ejemplo 4:

a) $(3-2i) + (4+5i) = (3+4) + (-2+5)i = 7+3i$

b) En la práctica es habitual no poner cada sumando entre paréntesis. Así, para sumar $4 + \frac{1}{3}i$ y $\frac{3}{2} + \frac{2}{3}i$ se procede como sigue:

$$4 + \frac{1}{3}i + \frac{3}{2} + \frac{2}{3}i = 4 + \frac{3}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right)i = \frac{11}{2} + 1i = \frac{11}{2} + i$$

El hecho de que dado cualquier número complejo exista su elemento opuesto permite definir la **resta** en \mathbb{C} de la forma:

$$(a+bi) - (c+di) = (a+bi) + (-(c+di)) = (a+bi) + (-c-di) = (a-c) + (b-d)i$$

que es una operación interna.

Producto de números complejos

Dados dos números complejos $a+bi$ y $c+di$ su producto es otro número complejo de la forma

$$(a+bi) \cdot (c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$$

Ejemplo 5: $(3-2i) \cdot (4+7i) = (3 \cdot 4 - (-2) \cdot 7) + (3 \cdot 7 + (-2) \cdot 4)i = 26 + 13i$

En la práctica, el producto de dos números complejos se obtiene multiplicando las expresiones $a+bi$ y $c+di$ utilizando la propiedad distributiva y teniendo en cuenta que $i^2 = -1$:

$$(a+bi) \cdot (c+di) = ac + adi + bic + bd^2 = ac + adi + bci - bd = (ac-bd) + (ad+bc)i$$

Ejemplo 6:

a) $(3+i) \cdot 4i = 12i + 4i^2 = 12i - 4 = -4 + 12i$

b) $\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5}i\right) \cdot (2+10i) = \frac{2}{3} + \frac{10}{3}i + \frac{4}{5}i + \frac{20}{5}i^2 = \frac{2}{3} - 4 + \left(\frac{10}{3} + \frac{4}{5}\right)i = \frac{-10}{3} + \frac{62}{15}i$

El hecho de que dado cualquier número complejo no nulo exista su elemento inverso permite definir la **división** en \mathbb{C} como:

$$(a+bi) : (c+di) = (a+bi) \cdot (c+di)^{-1} = (a+bi) \cdot \left(\frac{c}{c^2+d^2} - \frac{d}{c^2+d^2}i\right) = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i, \text{ si } c+di \neq 0$$

En la práctica, para calcular $(a+bi) : (c+di) = \frac{a+bi}{c+di}$, basta multiplicar el numerador y el denominador por el conjugado del denominador y realizar operaciones:

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(ac+bd) + (-ad+bc)i}{(c^2+d^2) + (-cd+dc)i} = \frac{(ac+bd) + (-ad+bc)i}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

Este mismo proceso se puede utilizar para calcular el inverso de un número complejo no nulo, escribiéndolo de la forma $(a+bi)^{-1} = \frac{1}{a+bi}$ y realizando la división.

Ejemplo 8:

$$a. \quad (11+10i):(1+4i) = \frac{11+10i}{1+4i} = \frac{(11+10i)(1-4i)}{(1+4i)(1-4i)} = \frac{11-44i+10i-40i^2}{1-16i^2} = \frac{51-34i}{17} = 3-2i$$

$$b. \quad (-3+7i)^{-1} = \frac{1}{-3+7i} = \frac{1(-3+7i)}{(-3+7i)(-3-7i)} = \frac{-3+7i}{9-49i^2} = \frac{-3+7i}{58} = \frac{-3}{58} + \frac{7}{58}i$$