Autoras: Gloria Jarne, Esperanza Minguillón, Trinidad Zabal

OTRAS IGUALDADES TRIGONOMÉTRICAS

Razones trigonométricas de la suma/diferencia de dos ángulos

SUMA

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}\alpha \cos\beta + \cos\alpha\, \text{sen}\beta$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \text{sen}\alpha\, \text{sen}\beta$$
$$\text{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\text{tg}\alpha + \text{tg}\beta}{1 - \text{tg}\alpha\ \text{tg}\beta}$$

DIFERENCIA

$$\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen}\alpha \cos\beta - \cos\alpha\, \text{sen}\beta$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \text{sen}\alpha\, \text{sen}\beta$$
$$\text{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\text{tg}\alpha - \text{tg}\beta}{1 + \text{tg}\alpha\ \text{tg}\beta}$$

Ejemplo 11: Calcular las razones de 75º y de 15º en función de las de 45º y 30º

$$\text{sen}75º = \text{sen}(45º + 30º) = \text{sen}45º \cos30º + \cos45º\, \text{sen}30º = \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos75º = \cos(45º + 30º) = \cos45º \cos30º - \text{sen}45º\, \text{sen}30º = \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{tg}75º = \text{tg}(45º + 30º) = \frac{\text{tg}45º + \text{tg}30º}{1 - \text{tg}45º\ \text{tg}30º} = \frac{1 + 1/\sqrt{3}}{1 - 1/\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$

$$\text{sen}15º = \text{sen}(45º - 30º) = \text{sen}45º \cos30º - \cos45º\, \text{sen}30º = \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos15º = \cos(45º - 30º) = \cos45º \cos30º + \text{sen}45º\, \text{sen}30º = \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{tg}15º = \text{tg}(45º - 30º) = \frac{\text{tg}45º - \text{tg}30º}{1 + \text{tg}45º\ \text{tg}30º} = \frac{1 - 1/\sqrt{3}}{1 + 1/\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

Razones trigonométricas del ángulo doble y del ángulo mitad

ÁNGULO DOBLE

$$\text{sen}\ 2\alpha = 2\ \text{sen}\alpha \cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha$$

$$\text{tg}\ 2\alpha = \frac{2\ \text{tg}\alpha}{1 - \text{tg}^2\alpha}$$

ÁNGULO MITAD

$$|\text{sen}(\alpha/2)| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$|\cos(\alpha/2)| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$|\text{tg}(\alpha/2)| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

Ejemplo 12: Calcular las razones trigonométricas del ángulo de $\frac{\pi}{8}$ radianes

Como $\frac{\pi}{8}$ es la mitad de $\frac{\pi}{4}$ se aplican las fórmulas del ángulo mitad y al ser un ángulo del primer cuadrante sus razones trigonométricas son todas positivas, por tanto, se tiene:

$$\text{sen}\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-\cos(\pi/4)}{2}} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{2}/2}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1+\cos(\pi/4)}{2}} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}/2}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$\text{tg}\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-\cos(\pi/4)}{1+\cos(\pi/4)}} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{2}/2}{1+\sqrt{2}/2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}$$

Fórmulas para transformar la suma/diferencia de razones trigonométricas de dos ángulos en producto

$$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Ejemplo 13: Simplificar la expresión $\frac{\operatorname{sen}3x + \operatorname{sen}x}{\cos 3x - \cos x}$

$$\frac{\operatorname{sen}3x + \operatorname{sen}x}{\cos 3x - \cos x} = \frac{2\operatorname{sen}2x\cos x}{-2\operatorname{sen}2x\operatorname{sen}x} = \frac{\cos x}{-\operatorname{sen}x} = \frac{-1}{\operatorname{tg}x}$$

Fórmulas para transformar el producto de razones trigonométricas de dos ángulos en suma

$$\operatorname{sen}\alpha \, . \, \operatorname{sen}\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)}{2}$$

$$\cos\alpha \, . \, \cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)}{2}$$

$$\operatorname{sen}\alpha \, . \, \cos\beta = \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{2}$$