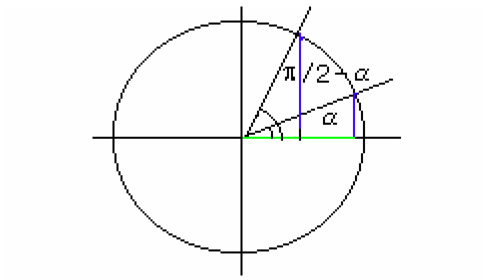
Autoras: Gloria Jarne, Esperanza Minguillón, Trinidad Zabal

RELACIÓN ENTRE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE DOS ÁNGULOS

Dados dos ángulos, las razones trigonométricas de uno de ellos se pueden expresar en función de las del otro. A continuación, se consideran algunos de estos casos:

- La suma de los ángulos es $\frac{\pi}{2}$ (son complementarios), es decir, si uno es α el otro será $\frac{\pi}{2} - \alpha$ y se tiene

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \text{sen}\,\alpha$$
$$\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\text{tg}\,\alpha}$$



Ejemplo 6:

a) Escribir las razones trigonométricas del ángulo de 75º en función de las de 15º.

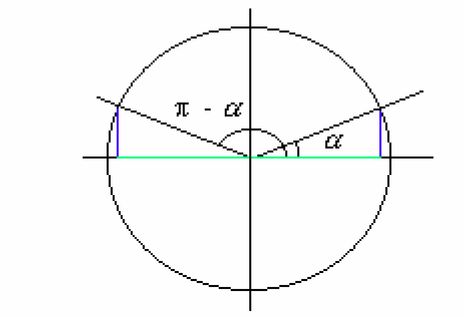
sen75º = sen(90º-15º) = cos15º
cos75º = cos(90º-15º) = sen15º
tg75º = tg(90º-15º) = $\frac{1}{\text{tg}15º}$

b) Escribir las razones trigonométricas del ángulo de $\frac{\pi}{6}$ radianes en función de las de $\frac{\pi}{3}$.

$$\text{sen}\frac{\pi}{6} = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3}$$
$$\cos\frac{\pi}{6} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \text{sen}\frac{\pi}{3}$$
$$\text{tg}\frac{\pi}{6} = \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\text{tg}\frac{\pi}{3}}$$

- La suma de los ángulos es π (son suplementarios), es decir, si uno es α el otro será $\pi - \alpha$ y se tiene

$$\text{sen}(\pi - \alpha) = \text{sen}\,\alpha$$
$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\text{tg}(\pi - \alpha) = -\text{tg}\,\alpha$$



Ejemplo 7:

a) Escribir las razones trigonométricas del ángulo de 145º en función de las de 35º.

sen145º = sen(180º-35º) = sen35º

cos145º = cos(180º-35º) = -cos35º

tg145º = tg(180º-35º) = -tg35º

b) Escribir las razones trigonométricas del ángulo de $\frac{3\pi}{4}$ radianes en función de las de $\frac{\pi}{4}$.

$$\text{sen}\,\frac{3\pi}{4} = \text{sen}\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \text{sen}\,\frac{\pi}{4}$$

$$\cos\frac{3\pi}{4} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4}$$

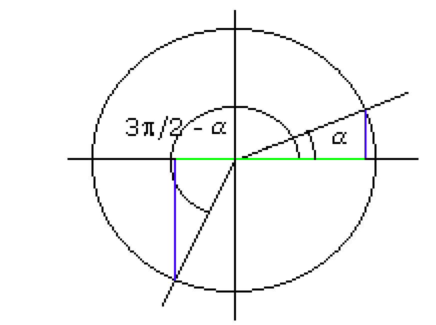
$$\text{tg}\,\frac{3\pi}{4} = \text{tg}\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\text{tg}\,\frac{\pi}{4}$$

- La suma de los ángulos es $\frac{3\pi}{2}$, es decir, si uno es α el otro será $\frac{3\pi}{2} - \alpha$ y se tiene

$$\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos\alpha$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\text{sen}\,\alpha$$

$$\text{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\text{tg}\,\alpha}$$



Ejemplo 8: Escribir las razones trigonométricas del ángulo de 240º en función de las de 30º.

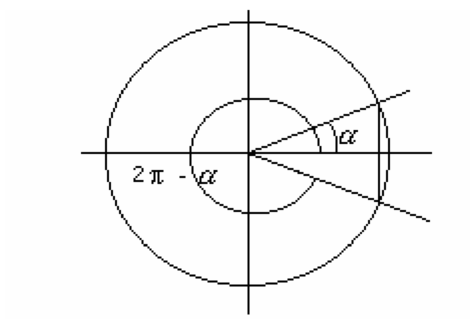
sen240º = sen(270º-30º) = -cos30º

cos240º = cos(270º-30º) = - sen30º

tg145º = tg(270º-30º) = $\frac{1}{\text{tg}30º}$

- La suma de los ángulos es 2π, es decir, si uno es α el otro será $2\pi - \alpha$ y se tiene

$$\text{sen}(2\pi - \alpha) = -\text{sen}\,\alpha$$
$$\cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha$$
$$\text{tg}(2\pi - \alpha) = -\text{tg}\,\alpha$$



NOTA: A la vista de la gráfica anterior se deduce que la relación entre las razones trigonométricas de los ángulos opuestos α y $-\alpha$ verifican: $\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}\alpha$

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$\text{tg}(-\alpha) = -\text{tg}\alpha$

Ejemplo 9: Escribir las razones trigonométricas del ángulo de $\frac{11\pi}{6}$ radianes en función de las de $\frac{\pi}{6}$.

$$\text{sen}\frac{11\pi}{6} = \text{sen}\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\text{sen}\frac{\pi}{6}$$

$$\cos\frac{11\pi}{6} = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6}$$

$$\text{tg}\frac{11\pi}{6} = \text{tg}\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\text{tg}\frac{\pi}{6}$$

- De forma similar se pueden encontrar relaciones entre las razones trigonométricas de dos ángulos que difieren en $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$,. . .(Ver ejercicios resueltos)

- La diferencia de los ángulos es 2π o un múltiplo suyo así, si uno es α el otro es $\alpha + 2\pi$ o $\alpha + 2k\pi$, con $k \in Z$, o lo que también es lo mismo, un ángulo es igual al otro más un número entero de vueltas a la circunferencia. Esto hace que los segundos lados de ambos ángulos "caigan" en el mismo sitio y que por tanto las razones trigonométricas de ambos ángulos también coincidan.

$\text{sen}(\alpha + 2k\pi) = \text{sen}\alpha$ $\qquad \cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha$ $\qquad \text{tg}(\alpha + 2k\pi) = \text{tg}\alpha$

Ejemplo 10: Escribir las razones trigonométricas del ángulo de $\frac{13\pi}{6}$ radianes en función de las de $\frac{\pi}{6}$.

$$\text{sen}\frac{13\pi}{6} = \text{sen}\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \text{sen}\frac{\pi}{6}$$

$$\cos\frac{13\pi}{6} = \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6}$$

$$\text{tg}\frac{13\pi}{6} = \text{tg}\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \text{tg}\frac{\pi}{6}$$