

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO CUALQUIERA

Los valores del seno, coseno y tangente definidos anteriormente para un ángulo agudo se generalizan a continuación para un ángulo cualquiera α .

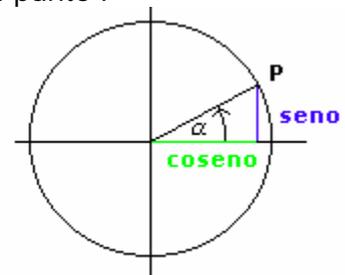
Se considera la circunferencia de radio 1 centrada en el origen de coordenadas. Se representa el ángulo α colocando el vértice en el origen de coordenadas y el primer lado en el eje de abscisas. El segundo lado cortará a la circunferencia unidad en un punto P. Teniendo en cuenta que un ángulo no nulo es positivo si su arco lleva sentido contrario al movimiento de las agujas de un reloj y negativo si su arco lleva el mismo sentido que el movimiento de las agujas de un reloj, se define:

- **Seno** de α como el valor de la ordenada del punto P.
- **Coseno** de α como el valor de la abscisa del punto P.
- **Tangente** de α como el cociente de la ordenada entre la abscisa del punto P

Si el ángulo α es



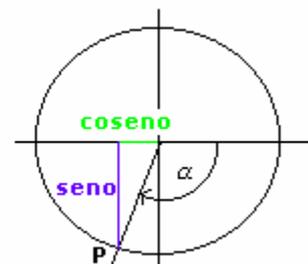
representando el proceso anterior se tiene



Si el ángulo α es



representando el proceso anterior se tiene



Fijándonos en el proceso de obtención de las razones trigonométricas se puede observar que, dependiendo de en qué cuadrante "caiga" el segundo lado del ángulo, el signo del seno, del coseno y de la tangente será positivo o negativo y que si el segundo lado coincide con algún eje entonces el ángulo tendrá alguna razón trigonométrica nula. Las siguientes tablas recogen esta información para ángulos positivos comprendidos entre 0 y 2π y para ángulos negativos entre -2π y 0:

ángulo	0	$(0, \pi/2)$	$\pi/2$	$(\pi/2, \pi)$	π	$(\pi, 3\pi/2)$	$3\pi/2$	$(3\pi/2, 2\pi)$	2π
seno	0	+	1	+	0	-	-1	-	0
coseno	1	+	0	-	-1	-	0	+	1
tangente	0	+	No existe	-	0	+	No existe	-	0

ángulo	-2π	$(-2\pi, -3\pi/2)$	$-3\pi/2$	$(-3\pi/2, -\pi)$	$-\pi$	$(-\pi, -\pi/2)$	$-\pi/2$	$(-\pi/2, 0)$	0
seno	0	+	1	+	0	-	-1	-	0
coseno	1	+	0	-	-1	-	0	+	1
tangente	0	+	No existe	-	0	+	No existe	-	0

En las tablas anteriores, se puede observar que las razones de los ángulos de -2π , 0 y 2π radianes coinciden, ello es debido a que el segundo lado de los tres ángulos "caen" en el mismo sitio. Lo mismo ocurre con $\pi/2$ y $-3\pi/2$, con $-\pi$ y π y con $-\pi/2$ y $3\pi/2$.

Por la misma razón si el ángulo es mayor que 2π el proceso de obtención de las razones trigonométricas es el mismo, basta observar dónde "cae" el segundo lado del ángulo después de haber dado alguna o algunas vueltas completas a la circunferencia.

Relación entre las razones trigonométricas de un ángulo

Las razones trigonométricas de un ángulo no son independientes, ya que están relacionadas entre sí mediante ciertas igualdades, como por ejemplo:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

Ejemplo 5:

a) Sabiendo que α es un ángulo positivo menor que $3\pi/2$ y que $\sin\alpha = -3/5$ calcular su coseno y su tangente.

Sustituyendo el valor del seno en $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, se tiene $\frac{9}{25} + \cos^2\alpha = 1$, de donde $\cos\alpha = \pm \frac{4}{5}$, a continuación se determina cuál de estos dos valores corresponde al del coseno pedido.

Al ser α un ángulo positivo menor que $3\pi/2$ y con seno negativo al representarlo en la circunferencia unidad su segundo lado cae en el tercer cuadrante, por lo tanto su coseno es negativo, luego $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$

Para calcular el valor de la tangente, se sustituye el seno y el coseno en $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, obteniéndose $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$.

b) Sabiendo que α es un ángulo positivo menor que π y que $\operatorname{tg}\alpha = -1/5$ calcular su seno y su coseno.

Sustituyendo el valor de la tangente en la igualdad $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, se tiene la ecuación $1 + \frac{1}{25} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, de donde

$$\cos\alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 25}} = \pm \sqrt{\frac{100}{325}} = \pm \frac{10}{5\sqrt{13}} = \pm \frac{2}{\sqrt{13}}$$

Al ser α positivo, menor que π y con tangente negativa es un ángulo del segundo cuadrante, por lo que el coseno es negativo, por tanto, de las dos soluciones obtenidas de la ecuación se concluye que $\cos\alpha = -\frac{2}{\sqrt{13}}$

Para calcular el valor del seno, se sustituye el coseno y la tangente en $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, obteniéndose $\frac{-15}{10} = \frac{\sin\alpha}{-\frac{2}{\sqrt{13}}}$, de donde

$$\text{se deduce que } \sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$$