Autoras: Gloria Jarne, Esperanza Minguillón, Trinidad Zabal

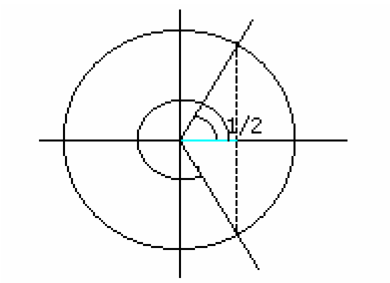
4. Resolver las siguientes ecuaciones: **a)** sen2x = sen$x$ **b)** $\frac{2}{\text{sen}x} = \frac{3}{\cos^2 x}$

Solución

a) Sustituyendo en la ecuación inicial la expresión del seno del ángulo doble, sen2x = 2 sen$x$ cos$x$, se obtiene la ecuación 2 sen$x$ cos$x$ = sen$x$.

Pasando sen$x$ al primer miembro y sacándolo factor común se obtiene sen$x$ (2 cos$x - 1$) = 0, de donde, sen$x$ = 0 o 2 cos$x - 1$ = 0. Resolviéndo cada una de las ecuaciones anteriores se tiene:

- sen$x$ = 0 $\Rightarrow$ $x = k\pi$ con $k \in$ Z.
- 2 cos$x - 1$ = 0 $\Rightarrow$ 2 cos$x$ = 1 $\Rightarrow$ cos$x$ = $\frac{1}{2}$. Los ángulos positivos menores que 360º cuyo coseno es $\frac{1}{2}$ son $\frac{\pi}{3}$ y $\frac{5\pi}{3}$, por tanto, las soluciones serán esos ángulos y los que se obtienen sumando un número entero de vueltas a la circunferencia.



Por tanto, las soluciones de la ecuación inicial son $x = k\pi$, $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ y $x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$ con $k \in$ Z.

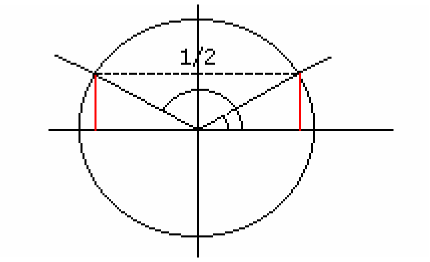
b) Para resolver la ecuación inicial es conveniente que aparezca una única razón trigonométrica, para ello se sustituye $\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x$, quedando $\frac{2}{\text{sen}x} = \frac{3}{1-\text{sen}^2 x}$, y pasando todo al primer miembro se obtiene, $\frac{2\left(1-\text{sen}^2 x\right) - 3\text{sen}x}{\text{sen}x\left(1-\text{sen}^2 x\right)} = 0$.

Las soluciones serán los valores de x para los que el numerador sea nulo, 2 - 3sen$x$ - 2sen^2x = 0, y no anulen el denominador, es decir, las que verifiquen sen$x \neq 0$ y sen$^2x \neq 1$.

Al ser 2 - 3sen$x$ - 2sen^2x = 0 una ecuación de segundo grado con incógnita sen$x$ se tiene

$$\text{sen}x = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{-4} = \frac{3 \pm 5}{-4} = \begin{cases} -2 \\ 1/2 \end{cases}$$

El valor del seno siempre está entre -1 y 1, por tanto de los dos valores obtenidos, el único a considerar es sen$x = \frac{1}{2}$. (Observar que se verifica sen$x \neq 0$ y sen$^2x \neq 1$)



Los ángulos $\frac{\pi}{6}$ y $\frac{5\pi}{6}$ son los únicos positivos menores que 360º que tienen el seno igual a $\frac{1}{2}$, por tanto, las soluciones serán esos ángulos y los que se obtienen sumando un número entero de vueltas a la circunferencia, es decir, las soluciones son

$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ y $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ con $k \in Z$.