5. Resolver el sistema $\begin{cases} x^2 - 4 \le -y^2 + 2y - 1 \\ y - x^2 \le 0 \end{cases}$ y representar gráficamente su solución.

Solución

Para resolver la primera inecuación se realizan las siguientes operaciones con objeto de completar cuadrados:

$$x^2 - 4 \le -y^2 + 2y - 1 \;\Leftrightarrow\; x^2 + y^2 - 2y \le 3 \;\Leftrightarrow\; x^2 + (y-1)^2 - 1 \le 3 \;\Leftrightarrow\; x^2 + (y-1)^2 \le 4$$

Para representar gráficamente la solución de esta inecuación dibujamos la curva $x^2 + (y-1)^2 = 4$ que es la circunferencia de centro (0, 1) y radio 2 y se considera la región donde se verifica $x^2 + (y-1)^2 \le 4$ para lo cual basta elegir un punto que no esté en la circunferencia y comprobar si la verifica o no dicha desigualdad (por ejemplo $x = 0$, $y = 0$ es un punto que cumple la inecuación ya que al sustituir se obtiene $1 \le 4$). Por tanto, la solución es el conjunto de puntos de la circunferencia y de su interior. (Ver figura)

Para resolver la segunda inecuación $y - x^2 \le 0$, despejamos y obteniéndose $y \le x^2$.

La curva $y = x^2$ es la parábola de vértice (0, 0) y de eje OY que pasa por el punto (1, 1). Para determinar la región donde se verifica $y \le x^2$ basta elegir un punto que no esté en la parábola y comprobar si verifica o no la inecuación (por ejemplo $x = 2$, $y = 1$ es un punto que cumple la inecuación ya que al sustituir se obtiene $1 < 4$). Por tanto, la solución está formada por el conjunto de puntos que están en la parábola y debajo de ella. (Ver figura)

La solución del sistema es la intersección de las dos regiones solución de cada una de las inecuaciones y se muestra sombreada en el siguiente dibujo: