4. Resolver el sistema de inecuaciones $\begin{cases} \dfrac{2x-1}{x} > 0 \\ x^3 - 1 \leq 3x(x-1) \\ 0 \leq \sqrt{x+1} \end{cases}$

Solución

Se resuelve la primera inecuación $\frac{2x-1}{x} > 0$, para lo que se estudia el signo del numerador y denominador en los intervalos dados por los puntos que los anulan, $\frac{1}{2}$ y 0, respectivamente.

Signo	$(-\infty, 0)$	$\left(0, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$
$2x - 1$	-	-	+
x	-	+	+
$\frac{2x-1}{x}$	+	-	+

Observar que los extremos de los intervalos no verifican de la inecuación. Por tanto, el conjunto de soluciones es $S_1 = (-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

La segunda inecuación, $x^3 - 1 \leq 3x(x-1)$, es equivalente a $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \leq 0$, es decir, $(x-1)^3 \leq 0$ que se cumple si $x - 1 \leq 0$, por lo tanto la solución es $S_2 = (-\infty, 1]$.

La tercera inecuación, $0 \leq \sqrt{x+1}$, se verifica siempre que exista la raíz cuadrada, es decir, si $x + 1 \geq 0$, por lo tanto la solución es $S_3 = [-1, +\infty)$.

En consecuencia, la solución del sistema de inecuaciones es:

$$S = S_1 \cap S_2 \cap S_3 = \left((-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)\right) \cap (-\infty, 1] \cap [-1, +\infty) = [-1, 0) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right].$$